

Μαθηματικά Πληροφορικής

6ο Μάθημα

Ηλίας Κουτσοπιιάς

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
elias@di.uoa.gr

Γενικό πλάνο

Ανάλυση αλγορίθμων

Συμβολισμοί O , Ω και Θ

Αναδρομικές εξισώσεις

Είδη αλγορίθμων

- ▶ Αλγόριθμοι με αρχή και τέλος, με είσοδο και έξοδο
- ▶ Ατέρμονες αλγόριθμοι (λειτουργικά συστήματα, δομές δεδομένων, πρωτόκολλα Διαδικτύου).
- ▶ Παράλληλοι, κατανεμημένοι κλπ

Εδώ θα μελετήσουμε μόνο το πρώτο είδος και ειδικά το χρόνο εκτέλεσης των αλγορίθμων.

Υποθέσεις και συμβάσεις

- ▶ Ο χρόνος εκτέλεσης ενός αλγορίθμου (προγράμματος) εξαρτάται από
 - ▶ την είσοδο
 - ▶ τη γλώσσα προγραμματισμού
 - ▶ τον επεξεργαστή
 - ▶ το υπολογιστικό περιβάλλον
 - ▶ ...
- ▶ Για μια καλή θεωρία ανάλυσης αλγορίθμων πρέπει να
 - ▶ να ξεκαθαρίσουμε ποια χαρακτηριστικά της εισόδου επηρεάζουν το χρόνο του αλγορίθμου
 - ▶ να εξαλείψουμε με κάποιο τρόπο τους υπόλοιπους εξωγενείς παράγοντες

Υποθέσεις και συμβάσεις

- ▶ Οι εξωγενείς παράγοντες επηρεάζουν κυρίως πολλαπλασιαστικά το χρόνο εκτέλεσης.
 - ▶ Εκτέλεση σε υπολογιστή X : t
 - ▶ Εκτέλεση σε υπολογιστή Υ : αt
- ▶ Από τα χαρακτηριστικά της εισόδου, κρατάμε μόνο το μήκος της εισόδου.

Βασική παραδοχή:

Ο χρόνος είναι συνάρτηση $T(n)$ του μήκους n της εισόδου.

- ▶ Ποιας εισόδου όμως αφού υπάρχουν 2^n εισοδοί μήκους n ;

Worst-case analysis:

$T(n)$ είναι ο μεγαλύτερος μεταξύ των χρόνων των εισόδων μήκους n .

Μήκος εισόδου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- ▶ Είσοδος μια συμβολοσειρά του αλφαβήτου $\{0, 1\}$:
Μήκος της εισόδου είναι ο αριθμός των συμβόλων της εισόδου.
- ▶ Είσοδος μια συμβολοσειρά του αλφαβήτου $\{0, 1, \dots, 9\}$:
Μήκος εισόδου είναι 4 επί τον αριθμό των συμβόλων της εισόδου.
- ▶ Είσοδος ένας φυσικός αριθμός a :
Μήκος $\lceil \log a \rceil \approx \log a$.
- ▶ Είσοδος είναι μια ακολουθία a_1, a_2, \dots, a_k φυσικών αριθμών :
Μήκος περίπου $\lceil \log a_1 \rceil + \lceil \log a_2 \rceil + \dots + \lceil \log a_k \rceil$, αλλά πρέπει να λάβουμε υπόψη και τα κόμματα.

Είναι φανερό ότι ο καθορισμός του μήκους μιας εισόδου παρουσιάζει επιπλοκές και δυσκολίες.

Συμβολισμός O

Ορισμός

Έστω f και g δυο συναρτήσεις από τους μη αρνητικούς ακέραιους στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Θα λέμε ότι $f(n) = O(g(n))$ αν υπάρχουν θετικές σταθερές c και n_0 τέτοιες ώστε

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

για κάθε $n \geq n_0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ($f(n) = 10n + 7$, $g(n) = n$, $10n + 7 = O(n)$)

Αρκεί να βρούμε τις δυο σταθερές c και n_0 του ορισμού και να επιβεβαιώσουμε τη σχέση $f(n) \leq c \cdot g(n)$.

$$n_0 = 1 \quad c = 17$$

Για $n \geq n_0 = 1$, έχουμε

$$f(n) = 10n + 7 \leq 10n + 7n \leq 17n = cn = cg(n).$$

Συμβολισμός O

Πρόταση

Έστω $p(n)$ ένα πολώνυμο βαθμού d . Τότε $p(n) = O(n^d)$.

Απόδειξη.

$$p(n) = a_d n^d + \dots + a_1 n + a_0$$

Διαλέγουμε $n_0 = 1$ και $c = |a_d| + \dots + |a_1| + |a_0|$ και έχουμε

$$\begin{aligned} p(n) &\leq |a_d n^d + \dots + a_1 n + a_0| \\ &\leq |a_d n^d| + \dots + |a_1 n| + |a_0| \\ &\leq |a_d| n^d + \dots + |a_1| n + |a_0| \\ &\leq |a_d| n^d + \dots + |a_1| n^d + |a_0| n^d \\ &= c n^d. \end{aligned}$$

Γιατί δεν διαλέξαμε $c = a_d + \dots + a_1 + a_0$, χωρίς τις απόλυτες τιμές; □

Τεχνικές

- ▶ Πως αποδεικνύουμε ότι $f(n) = O(g(n))$;
 - ▶ Βρίσκουμε κατάλληλα c και n_0 .
 - ▶ Για θετικές συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$, δείχνουμε ότι το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

υπάρχει και είναι κάποια σταθερά (δεν είναι ∞ δηλαδή).

- ▶ Πως αποδεικνύουμε το αντίστροφο, δηλαδή ότι δεν ισχύει $f(n) = O(g(n))$;
 - ▶ Δείχνουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι δεν υπάρχουν κατάλληλα c και n_0 .
 - ▶ Για θετικές συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$, δείχνουμε ότι το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

υπάρχει και είναι ∞ .

Η τεχνική με τα όρια

Πρόταση

Για θετικές συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$, αν το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ υπάρχει και είναι κάποια σταθερά (δεν είναι ∞ δηλαδή), τότε $f(n) = O(g(n))$.

Απόδειξη.

Έστω a το όριο. Τι σημαίνει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a$?

Ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει m_ϵ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq m_\epsilon$:

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} - a \right| \leq \epsilon$$

Ας πάρουμε $\epsilon = a$. Τότε για κάθε $n \geq m_a$:

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} - a \right| \leq a \Rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} \leq 2a$$

Αρκεί τώρα να πάρουμε $n_0 = m_a$ και $c = 2a$. □

Παράδειγμα

Πρόταση

Να δειχτεί ότι δεν ισχύει $n^2 = O(n)$.

Απόδειξη.

Με εις άτοπο απαγωγή: Έστω ότι υπήρχαν κατάλληλες σταθερές c και n_0 . Ας θεωρήσουμε την τιμή $n = \lceil \max\{n_0, c + 1\} \rceil$. Θα πρέπει να έχουμε $n^2 \leq cn$. Ισοδύναμα $n \leq c$, άτοπο. □

Εναλλακτική απόδειξη.

Το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n}$$

υπάρχει και είναι ∞ . □

Σχέσεις του συμβολισμού O

Πρόταση

Αν $f(n) = O(g(n))$ και $g(n) = O(h(n))$ τότε $f(n) = O(h(n))$

Πρόταση

$f_1(n) + f_2(n) = O(\max\{f_1(n), f_2(n)\})$

Ιεραρχία συναρτήσεων

Υπερεκθετικές:	2^{2^n}					
Εκθετικές:	2^{n^2}	n^n	$n!$	3^n	2^n	$2^{\sqrt{n}}$
Υποεκθετικές:	$n^{\log n}$					
Πολυωνυμικές:	n^2	$n \log n$	n	\sqrt{n}		
Λογαριθμικές:	$\log^2 n$	$\log n$				
Υπολογαριθμικές:	$\log \log n$					
Σταθερές	1					

Συμβολισμός Ω

Ορισμός

Έστω f και g δυο συναρτήσεις από τους μη αρνητικούς ακέραιους στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Θα λέμε ότι $f(n) = \Omega(g(n))$ αν υπάρχουν θετικές σταθερές c και n_0 τέτοιες ώστε

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

για κάθε $n \geq n_0$.

Ισοδύναμα, $f(n) = \Omega(g(n))$ αν και μόνο αν $g(n) = O(f(n))$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ($f(n) = 10n - 7$, $g(n) = n$, $10n - 7 = \Omega(n)$)

Αρκεί να βρούμε τις δυο σταθερές c και n_0 του ορισμού και να επιβεβαιώσουμε τη σχέση $f(n) \geq c \cdot g(n)$.

$$n_0 = 1 \quad c = 3$$

$$f(n) = 10n - 7 \geq 10n - 7n \geq 3n = cn = cg(n).$$

Συμβολισμός Θ

Ορισμός

Έστω f και g δυο συναρτήσεις από τους μη αρνητικούς ακέραιους στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Θα λέμε ότι $f(n) = \Theta(g(n))$ αν $f(n) = O(g(n))$ και $f(n) = \Omega(g(n))$.

Πρόταση

Αν το $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ υπάρχει και έχει τιμή λ τότε

$$f(n) = \begin{cases} O(g(n)) & \text{αν } \lambda = 0 \\ \Theta(g(n)) & \text{αν } 0 < \lambda < \infty \\ \Omega(g(n)) & \text{αν } \lambda = \infty \end{cases}$$

Βασικές αναδρομικές εξισώσεις

Στην ανάλυση αλγορίθμων χρειάζεται συχνά να βρούμε τη λύση αναδρομικών εξισώσεων. Τυπικές αναδρομικές εξισώσεις είναι οι εξής:

- ▶ $T(n) = T(n-1) + n$
- ▶ $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$
- ▶ $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$

Τεχνικές επίλυσης αναδρομικών

Για να λύσουμε μια αναδρομική χρησιμοποιούμε τρεις τεχνικές:

- ▶ Αν αποτελεί ειδική περίπτωση γνωστής οικογένειας αναδρομικών εξισώσεων, χρησιμοποιούμε τη γενικότερη λύση
- ▶ Μαντεύουμε τη λύση και την επιβεβαιώνουμε
- ▶ Την 'ξεδιπλώνουμε', τη γενικεύουμε, και επιβεβαιώνουμε τη γενίκευση με χρήση επαγωγής.

Ξεδίπλωμα

- ▶ Ποια η λύση της αναδρομικής εξίσωσης $T(n) = T(n-1) + n$, με $T(1) = 1$;

$$\begin{aligned}T(n) &= T(n-1) + n \\ &= T(n-2) + (n-1) + n \\ &= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n\end{aligned}$$

- ▶ Μαντεύουμε τη γενίκευση $T(n) = T(n-k) + (n-k+1) + \dots + n$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
- ▶ Αυτό το αποδεικνύουμε με επαγωγή στο k .
- ▶ Και τώρα για $k = n-1$, έχουμε

$$T(n) = T(1) + 2 + \dots + n = 1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2.$$

Ξεδίπλωμα

- ▶ Ποια η λύση της αναδρομικής εξίσωσης $T(n) = 3T(n-1) - 2T(n-2)$, με $T(1) = 1$ και $T(2) = 2$;

$$\begin{aligned}T(n) &= 3T(n-1) - 2T(n-2) \\ &= 7T(n-2) - 6T(n-3) \\ &= 15T(n-3) - 14T(n-4)\end{aligned}$$

- ▶ Μαντεύουμε τη γενίκευση $T(n) = (2^k - 1)T(n-k+1) - (2^k - 2)T(n-k)$, για κάθε $k \geq 2$.
- ▶ Αυτό το αποδεικνύουμε με επαγωγή στο k .
- ▶ Και τώρα για $k = n-1$, έχουμε

$$T(n) = (2^{n-1} - 1)T(2) - (2^{n-1} - 2)T(1) = 2^{n-1}.$$

Λύση ομογενών αναδρομικών εξισώσεων

Θεώρημα

Έστω $T(n) = a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \dots + a_r T(n-r)$ μια αναδρομική εξίσωση. Αν οι μιγαδικές ρίζες x_1, x_2, \dots, x_r της πολωνυμικής εξίσωσης $x^r = a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \dots + a_r$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους, η λύση της αναδρομικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$T(n) = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \dots + c_r x_r^n,$$

όπου c_1, c_2, \dots, c_n σταθερές που καθορίζονται από τις αρχικές τιμές $T(1), T(2), \dots, T(r)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\begin{aligned}T(n) &= 3T(n-1) - 2T(n-2) \\ x^2 &= 3x - 2 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1 \\ T(n) &= c_1 2^n + c_2 1^n = c_1 2^n + c_2\end{aligned}$$