# Μαθηματικά Πληροφορικής

## 5ο Μάθημα

Ηλίας Κουτσουπιάς

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
elias@@di.uoa.gr

# Γενικό πλάνο

Αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα

Η Μέθοδος της Διαγωνίου

Οι πραγματικοί αριθμοί

Υπολογισιμότητα

# Αριθμήσιμα ή μετρήσιμα σύνολα

- Πόσα στοιχεία έχει το σύνολο $\{a, b, r, q, x\}$;
- Όσα και το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ που είναι υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.
- Ένα σύνολο θα το λέμε αριθμήσιμο αν είναι σε 1-1 αντιστοιχία με ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών.

## Ορισμός

Ένα σύνολο $S$ λέγεται αριθμήσιμο ή μετρήσιμο αν υπάρχει ακολουθία $r_1, r_2, \ldots$ στην οποία να εμφανίζονται όλα τα στοιχεία του $S$.

# Παραδείγματα αριθμήσιμων συνόλων

- Κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι αριθμήσιμο.
- Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.

$$1, 2, 3, \ldots$$

- Το σύνολο των ακεραίων είναι αριθμήσιμο.

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

# Οι ρητοί αριθμοί

- Είναι αριθμήσιμο το σύνολο των θετικών ρητών $\mathbb{Q}^+$, δηλαδή των κλασμάτων $p/q$ με $p, q \in \mathbb{N}$;
- Ας προσπαθήσουμε να βάλουμε όλα τα κλάσματα σε σειρά ως εξής:
$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{3}{1}, \ldots$$
- Δείχνει αυτή η σειρά ότι το σύνολο των θετικών ρητών είναι αριθμήσιμο;
- ΟΧΙ! Σε ποιά θέση είναι το $\frac{2}{1}$;

# Οι ρητοί αριθμοί (συνέχεια)

- Υπάρχει όμως κατάλληλη ακολουθία.
- Για παράδειγμα:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \ldots$$

- Πρώτα τα κλάσματα με άθροισμα αριθμητή και παρονομαστή ίσο με 2, μετά τα κλάσματα με άθροισμα αριθμητή και παρονομαστή ίσο με 3, κοκ.
- Ένα κλάσμα $p/q$ θα εμφανιστεί όταν απαριθμούμε τα κλάσματα με άθροισμα αριθμητή και παρονομαστή ίσο με $p+q$.
- Επειδή το πλήθος των ζευγαριών των φυσικών αριθμών με άθροισμα το πολύ $p+q$ είναι το πολύ $(p+q)^2$, το κλάσμα $p/q$, θα εμφανιστεί στα πρώτα $(p+q)^2$ στοιχεία.

# Οι ρητοί αριθμοί (συνέχεια)

- Στην πραγματικότητα υπάρχουν πολλές κατάλληλες ακολουθίες.
- Να ένα άλλο παράδειγμα:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{1} \ldots$$

- Κάθε κλάσμα $p/q$ ακολουθείται από το αντίστροφό του $q/p$.
- Τα κλάσματα στις περιττές θέσεις, έχουν αριθμητή μικρότερο ή ίσο του παρονομαστή.
- Σ′ αυτά πρώτα είναι τα όλα τα κλάσματα με παρονομαστή 1, μετά όλα τα κλάσματα με παρονομαστή 2, κοκ.
- Επομένως ένα κλάσμα $p/q$, με $p \leq q$, θα εμφανιστεί όταν απαριθμούνται τα κλάσματα με παρονομαστές $q$.
- Ένα κλάσμα $p/q$, με $p > q$, θα εμφανιστεί αμέσως μετά το $q/p$.

# Συμβολοσειρές

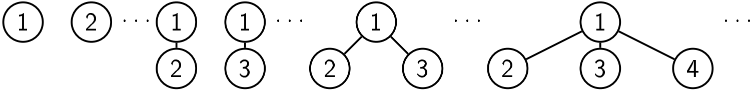
- Αλφάβητο είναι ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο.
- Έστω λοιπόν ένα αλφάβητο $\Sigma$ και έστω $\Sigma^*$ το σύνολο των συμβολοσειρών του.
- Για παράδειγμα, $\Sigma = \{0, 1\}$ και $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$.
- Είναι το σύνολο $\Sigma^*$ αριθμήσιμο;
- Ναι. Ακολουθία: πρώτα οι συμβολοσειρές με μήκος 0 (δηλαδή η $\epsilon$), μετά όλες τις συμβολοσειρές με μήκος 1, μετά όλες τις συμβολοσειρές με μήκος 2 κοκ.
- Για το παραπάνω παράδειγμα, η ακολουθία είναι

$$\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots$$

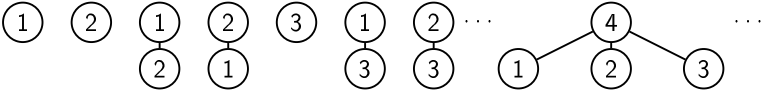
- Επειδή οι συμβολοσειρές με μήκος $k$ είναι πεπερασμένες, μια συμβολοσειρά μήκους $k$ θα εμφανιστεί τελικά στην ακολουθία αυτή.

# Δένδρα

- Είναι το σύνολο των (πεπερασμένων) δένδρων αριθμήσιμο;



- Δείχνει η σειρά αυτή ότι τα δένδρα είναι αριθμήσιμα;
- ΟΧΙ! Σε ποια θέση είναι τα δένδρα με 2 κόμβους;
- Υπάρχει όμως κατάλληλη ακολουθία: Πρώτα όλα τα δένδρα με σύνολο κόμβων το $\{1\}$, μετά όλα τα δένδρα με κόμβους στο $\{1,2\}$, μετά όλα τα δένδρα με κόμβους στο $\{1,2,3\}$, κοκ .



# Μη αριθμήσιμα σύνολα;

- Είναι όλα τα σύνολα αριθμήσιμα;
- Όχι. Θα δούμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο.
- Αλλά πως δείχνουμε ότι ένα σύνολο δεν είναι αριθμήσιμο;
- Με τη Μέθοδο της Διαγωνίου ή Διαγωνοποίηση.

# Η Μέθοδος της Διαγωνίου

- Ας πούμε ότι μας δίνονται 5 5-ψήφιοι αριθμοί και μας ζητάνε αν βρούμε ένα 5-ψήφιο αριθμό διαφορετικό από αυτούς. Το πρόβλημα είναι ότι κάθε ψηφίο των 5 αριθμών είναι γραμμένο σε κάρτα που είναι αναποδογυρισμένη και θέλουμε να κοιτάξουμε όσο το δυνατόν λιγότερες κάρτες.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

$\Rightarrow$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | |
| | 2 | | | |
| | | 9 | | |
| | | | 5 | |
| | | | | 5 |

- Ο αριθμός 43066 δεν είναι ένας από τους 5 αριθμούς. Διαφέρει από τον 1ο αριθμό στο 1ο ψηφίο, από τον 2ο στο 2ο ψηφίο και γενικά από τον *i*-οστό στο *i*-στο ψηφίο.

# Οι πραγματικοί δεν είναι αριθμήσιμοι

### Θεώρημα

*Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο, δηλαδή δεν υπάρχει ακολουθία $r_1, r_2, \ldots$ στην όποια να εμφανίζονται όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.*

### Απόδειξη.

- Με εις άτοπο απαγωγή.
- Έστω ότι υπήρχε τέτοια ακολουθία $r_1, r_2, \ldots$
- Ας θεωρήσουμε τη δεκαδική παράσταση των αριθμών αυτών και ας κατασκευάσουμε ένα αριθμό που διαφέρει από τον $r_1$ στο πρώτο δεκαδικό ψήφιο, από τον $r_2$ στο δεύτερο δεκαδικό ψήφιο, κοκ.

$\square$

# Οι πραγματικοί δεν είναι αριθμήσιμοι (συνέχεια)

Συνέχεια.

- Πιο συγκεκριμένα κατασκευάζουμε τον αριθμό $a$ με δεκαδική παράσταση $0.a_1a_2a_3\ldots$ όπου

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{αν το } i\text{-στο δεκαδικό ψηφίο του } r_i \text{ είναι διάφορο του } 1 \\ 2 & \text{αν το } i\text{-στο δεκαδικό ψηφίο του } r_i \text{ είναι ίσο με } 1 \end{cases}$$

- Για παράδειγμα, αν

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.06542\ldots \\ r_2 &= 1.11287\ldots \\ r_3 &= 3.14159\ldots \\ r_4 &= 1.41421\ldots \end{aligned}$$

τότε $a = 0.1221\ldots$.

# Οι πραγματικοί δεν είναι αριθμήσιμοι (συνέχεια)

Συνέχεια.

- Ο νέος αριθμός $a$ έχει διαφορετική δεκαδική παράσταση από κάθε αριθμό της ακολουθίας $r_1, r_2, \ldots$.
- Είναι όμως διαφορετικός από κάθε $r_i$;
- Κάποιοι αριθμοί έχουν δυο δεκαδικές παραστάσεις που από κάποιο σημείο και πέρα αποτελούνται από επαναλαμβανόμενα 0 ή από επαναλαμβανόμενα 9. Για παράδειγμα $1.20000\ldots = 1.19999\ldots$.
- Κανένα πρόβλημα όμως. Φροντίσαμε τα νέα ψηφία $a_i$ να μην περιέχουν ούτε 0 ούτε 9. Έτσι ο νέος αριθμός $a$, έχει και διαφορετική δεκαδική παράσταση αλλά και διαφορετική τιμή από κάθε $r_i$.
- Συμπέρασμα: Ο $a$ είναι πραγματικός αριθμός αλλά δεν ανήκει στην ακολουθία $r_1, r_2, \ldots$. Άτοπο. Άρα οι πραγματικοί δεν είναι αριθμήσιμοι.

$\square$

# Θεωρία Υπολογισμού

- Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει πρόγραμμα Pascal ή C ή οποιασδήποτε γενικής γλώσσας υπολογισμού που να μπορεί να αναλύει τον πηγαίο κώδικα προγραμμάτων της γλώσσας και να απαντά αν τερματίζει ή όχι όταν εκτελεστεί.
- Ο πηγαίος κώδικας ενός προγράμματος για μας εδώ δεν θα είναι παρά μια συμβολοσειρά (δηλαδή ένα κείμενο) κάποιου αλφάβητου $\Sigma$.
- Θα θεωρήσουμε προγράμματα που παίρνουν για είσοδο μια συμβολοσειρά του $\Sigma$.
- Έστω $P_1, P_2, \ldots$ τα προγράμματα αυτά. Τα προγράμματα είναι συμβολοσειρές, άρα είναι αριθμήσιμα.

# Θεωρία Υπολογισμού

- Ένα τέτοιο πρόγραμμα μπορεί να τερματίζει ή όχι. Τι θα κάνουν τα προγράμματα αν τους δώσουμε για είσοδο τους πηγαίους κώδικες;
- Ας ορίσουμε την συνάρτηση

$$g(P_i, P_j) = \begin{cases} \text{true} & \begin{array}{l}\text{αν το πρόγραμμα } P_i \text{ τερματίζει με είσοδο} \\ \text{τη συμβολοσειρά } P_j\end{array} \\ \text{false} & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

# Θεωρία Υπολογισμού

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | $g(P_1, P_1)$ | $g(P_1, P_2)$ | $g(P_1, P_3)$ | $g(P_1, P_4)$ | |
| $P_2$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | |
| $P_3$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $g(P_3, P_4)$ | |
| $P_4$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | |
| $P_5$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | |

- Χρησιμοποιώντας τώρα τη Μέθοδο της Διαγωνίου θεωρούμε τη γραμμή που έχει αντίστροφες τιμές από αυτές της διαγώνιου (από true σε false και το αντίστροφο).
- Η γραμμή που κατασκευάζεται με αυτό τον τρόπο, έχει στην $i$-οστή θέση true αν και μόνο αν $g(P_i, P_i) =$ false.
- Η γραμμή αυτή δεν υπάρχει στον πίνακα γιατί διαφέρει από την 1η γραμμή στην 1η θέση, από τη 2η γραμμή στη 2η θέση κοκ.
- Δηλαδή, δεν υπάρχει πρόγραμμα που να υπολογίζει το "*not* $g(P_i, P_i)$".

## Θεωρία Υπολογισμού

- Ισοδύναμα, δεν υπάρχει πρόγραμμα $H$ τέτοιο ώστε για κάθε συμβολοσειρά $P_i$

  το $H$ με είσοδο $P_i$ τερματίζει
  όταν και μόνο όταν
  το πρόγραμμα $P_i$ με είσοδο $P_i$ δεν τερματίζει

- Συμπεραίνουμε ότι δεν είναι υπολογίσιμο αν ένα πρόγραμμα τερματίζει ή όχι, γιατί διαφορετικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε αν το $P_i$ τερματίζει με είσοδο τον πηγαίο κώδικά του.