Μαθηματικά Πληροφορικής

4ο Μάθημα

Ηλίας Κουτσουπιάς

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
elias@@di.uoa.gr

Νοέμβριος 2011

Γενικό πλάνο

Μορφές αποδείξεων

Υπάρχουν πολλά είδη αποδείξεων. Εδώ θα δούμε τα πιο κοινά:

- Εξαντλητική μέθοδος ή μέθοδος επισκόπησης. Όταν το πρόβλημα έχει πεπερασμένο αριθμό περιπτώσεων, τις εξετάζουμε όλες.

Μορφές αποδείξεων

Υπάρχουν πολλά είδη αποδείξεων. Εδώ θα δούμε τα πιο κοινά:

- Εξαντλητική μέθοδος ή μέθοδος επισκόπησης. Όταν το πρόβλημα έχει πεπερασμένο αριθμό περιπτώσεων, τις εξετάζουμε όλες.
- Μαθηματική επαγωγή. Έστω μια πρόταση $P(n)$ που ισχύει για $n = 1$. Αν η $P(n)$ συνεπάγεται την $P(n+1)$, τότε η πρόταση ισχύει για όλους τους φυσικούς.

Μορφές αποδείξεων

Υπάρχουν πολλά είδη αποδείξεων. Εδώ θα δούμε τα πιο κοινά:

- Εξαντλητική μέθοδος ή μέθοδος επισκόπησης. Όταν το πρόβλημα έχει πεπερασμένο αριθμό περιπτώσεων, τις εξετάζουμε όλες.
- Μαθηματική επαγωγή. Έστω μια πρόταση $P(n)$ που ισχύει για $n = 1$. Αν η $P(n)$ συνεπάγεται την $P(n+1)$, τότε η πρόταση ισχύει για όλους τους φυσικούς.
- Αναδρομική επαγωγή. Επαγωγή όχι στους φυσικούς αριθμούς αλλά σε μια δομή που ορίζεται αναδρομικά.

Μορφές αποδείξεων (συνέχεια)

- Κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Δείχνουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου δίνοντας ένα αλγόριθμο που το παράγει. Στην ιδία κατηγορία ανήκει και η απόδειξη με αντιπαράδειγμα.

Μορφές αποδείξεων (συνέχεια)

- Κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Δείχνουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου δίνοντας ένα αλγόριθμο που το παράγει. Στην ιδία κατηγορία ανήκει και η απόδειξη με αντιπαράδειγμα.
- Μη κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Τέτοιες αποδείξεις χρησιμοποιούν

Μορφές αποδείξεων (συνέχεια)

- Κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Δείχνουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου δίνοντας ένα αλγόριθμο που το παράγει. Στην ιδία κατηγορία ανήκει και η απόδειξη με αντιπαράδειγμα.
- Μη κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Τέτοιες αποδείξεις χρησιμοποιούν
  - την αρχή του περιστερώνα και τις γενικεύσεις του

Μορφές αποδείξεων (συνέχεια)

- Κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Δείχνουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου δίνοντας ένα αλγόριθμο που το παράγει. Στην ιδία κατηγορία ανήκει και η απόδειξη με αντιπαράδειγμα.
- Μη κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Τέτοιες αποδείξεις χρησιμοποιούν
  - την αρχή του περιστερώνα και τις γενικεύσεις του
  - κατάλληλη καταμέτρηση

Μορφές αποδείξεων (συνέχεια)

- Κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Δείχνουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου δίνοντας ένα αλγόριθμο που το παράγει. Στην ιδία κατηγορία ανήκει και η απόδειξη με αντιπαράδειγμα.
- Μη κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Τέτοιες αποδείξεις χρησιμοποιούν
  - την αρχή του περιστερώνα και τις γενικεύσεις του
  - κατάλληλη καταμέτρηση
  - την πιθανοτική μέθοδο που βασίζεται στο ότι ένα στοιχείο υπάρχει όταν έχει μη μηδενική πιθανότητα ύπαρξης.

Μορφές αποδείξεων (συνέχεια)

- Κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Δείχνουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου δίνοντας ένα αλγόριθμο που το παράγει. Στην ιδία κατηγορία ανήκει και η απόδειξη με αντιπαράδειγμα.
- Μη κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Τέτοιες αποδείξεις χρησιμοποιούν
  - την αρχή του περιστερώνα και τις γενικεύσεις του
  - κατάλληλη καταμέτρηση
  - την πιθανοτική μέθοδο που βασίζεται στο ότι ένα στοιχείο υπάρχει όταν έχει μη μηδενική πιθανότητα ύπαρξης.
  - την διαγωνιοποίηση του Cantor.

Παράδειγμα: Άθροισμα κύβων

- Υπάρχει φυσικός ακέραιος που μπορεί να γραφεί με δύο διαφορετικούς τρόπους σαν άθροισμα δυο κύβων;

Παράδειγμα: Άθροισμα κύβων

- Υπάρχει φυσικός ακέραιος που μπορεί να γραφεί με δύο διαφορετικούς τρόπους σαν άθροισμα δυο κύβων;
- Ισοδύναμα, υπάρχουν δυο διαφορετικά ζεύγη φυσικών αριθμών $\{a_1, b_1\}$ και $\{a_2, b_2\}$ με $a_1^3 + b_1^3 = a_2^3 + b_2^3$;

Παράδειγμα: Άθροισμα κύβων

- Υπάρχει φυσικός ακέραιος που μπορεί να γραφεί με δύο διαφορετικούς τρόπους σαν άθροισμα δυο κύβων;
- Ισοδύναμα, υπάρχουν δυο διαφορετικά ζεύγη φυσικών αριθμών $\{a_1, b_1\}$ και $\{a_2, b_2\}$ με $a_1^3 + b_1^3 = a_2^3 + b_2^3$;
- Ο 1729 μπορεί να γραφεί σαν $1^3 + 12^3$ και σαν $9^3 + 10^3$.

Γενικά οι αποδείξεις ύπαρξης χωρίζονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες:

- Κατασκευαστικές αποδείξεις, στις οποίες η απόδειξη είτε δίνει το στοιχείο που έχει την απαιτούμενη ιδιότητα είτε δίνει ένα αλγόριθμο που παράγει ένα τέτοιο στοιχείο.

Κατασκευαστικές ή Όχι;

Γενικά οι αποδείξεις ύπαρξης χωρίζονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες:

- Κατασκευαστικές αποδείξεις, στις οποίες η απόδειξη είτε δίνει το στοιχείο που έχει την απαιτούμενη ιδιότητα είτε δίνει ένα αλγόριθμο που παράγει ένα τέτοιο στοιχείο.
    - Παράδειγμα: Υπάρχει ακέραιος που γράφεται με δυο τρόπους σαν άθροισμα δυο κύβων. Η απόδειξη $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ είναι κατασκευαστική.

Κατασκευαστικές ή Όχι;

Γενικά οι αποδείξεις ύπαρξης χωρίζονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες:

- Κατασκευαστικές αποδείξεις, στις οποίες η απόδειξη είτε δίνει το στοιχείο που έχει την απαιτούμενη ιδιότητα είτε δίνει ένα αλγόριθμο που παράγει ένα τέτοιο στοιχείο.
  - Παράδειγμα: Υπάρχει ακέραιος που γράφεται με δυο τρόπους σαν άθροισμα δυο κύβων. Η απόδειξη $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ είναι κατασκευαστική.
- Μη κατασκευαστικές αποδείξεις, στις οποίες δείχνουμε ότι το στοιχείο υπάρχει, αλλά ούτε το στοιχείο δίνεται ούτε αλγόριθμος που να το παράγει.

Παράδειγμα μη Κατασκευαστικής Απόδειξης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να δειχτεί ότι υπάρχουν άρρητοι x και y τέτοιοι ώστε ο x^y είναι ρητός.

Παράδειγμα μη Κατασκευαστικής Απόδειξης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να δειχτεί ότι υπάρχουν άρρητοι x και y τέτοιοι ώστε ο x^y είναι ρητός.

Απόδειξη.

- Είτε οι $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = \sqrt{2}$ έχουν την ιδιότητα είτε οι $x_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y_2 = \sqrt{2}$ την έχουν.
- Γιατί; $x_1^{y_1} = x_2$ και $x_2^{y_2} = 2$. Αν x_2 είναι ρητός τότε το πρώτο ζευγάρι έχει την ιδιότητα, διαφορετικά το δεύτερο ζευγάρι την έχει.

$\square$

Παράδειγμα μη Κατασκευαστικής Απόδειξης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να δειχτεί ότι υπάρχουν άρρητοι x και y τέτοιοι ώστε ο x^y είναι ρητός.

Απόδειξη.

- Είτε οι $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = \sqrt{2}$ έχουν την ιδιότητα είτε οι $x_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y_2 = \sqrt{2}$ την έχουν.
- Γιατί; $x_1^{y_1} = x_2$ και $x_2^{y_2} = 2$. Αν x_2 είναι ρητός τότε το πρώτο ζευγάρι έχει την ιδιότητα, διαφορετικά το δεύτερο ζευγάρι την έχει.
- Η απόδειξη είναι μη κατασκευαστική γιατί δεν μας λέει ποια x και y έχουν την ιδιότητα.

$\square$

Μέγιστος κοινός διαιρέτης

- Ο διαχωρισμός σε κατασκευαστικές αποδείξεις ή μη δεν είναι αυστηρός.

Μέγιστος κοινός διαιρέτης

- Ο διαχωρισμός σε κατασκευαστικές αποδείξεις ή μη δεν είναι αυστηρός.
- Θα δούμε ένα παράδειγμα δυο αποδείξεων του ιδίου θεωρήματος, μια κατασκευαστική και μια μη κατασκευαστική.

Μέγιστος κοινός διαιρέτης

- Ο διαχωρισμός σε κατασκευαστικές αποδείξεις ή μη δεν είναι αυστηρός.
- Θα δούμε ένα παράδειγμα δυο αποδείξεων του ιδίου θεωρήματος, μια κατασκευαστική και μια μη κατασκευαστική.

Μέγιστος κοινός διαιρέτης

- Ο διαχωρισμός σε κατασκευαστικές αποδείξεις ή μη δεν είναι αυστηρός.
- Θα δούμε ένα παράδειγμα δυο αποδείξεων του ιδίου θεωρήματος, μια κατασκευαστική και μια μη κατασκευαστική.

Θεώρημα

Έστω a και b δυο ακέραιοι με μέγιστο κοινό διαιρέτη δ. Τότε υπάρχουν ακέραιοι x και y τέτοιοι ώστε $ax + by = \delta$.

Μέγιστος κοινός διαιρέτης

- Ο διαχωρισμός σε κατασκευαστικές αποδείξεις ή μη δεν είναι αυστηρός.
- Θα δούμε ένα παράδειγμα δυο αποδείξεων του ιδίου θεωρήματος, μια κατασκευαστική και μια μη κατασκευαστική.

Θεώρημα

Έστω a και b δυο ακέραιοι με μέγιστο κοινό διαιρέτη δ. Τότε υπάρχουν ακέραιοι x και y τέτοιοι ώστε $ax + by = \delta$.

Μέγιστος κοινός διαιρέτης

- Ο διαχωρισμός σε κατασκευαστικές αποδείξεις ή μη δεν είναι αυστηρός.
- Θα δούμε ένα παράδειγμα δυο αποδείξεων του ιδίου θεωρήματος, μια κατασκευαστική και μια μη κατασκευαστική.

Θεώρημα

Έστω a και b δυο ακέραιοι με μέγιστο κοινό διαιρέτη δ. Τότε υπάρχουν ακέραιοι x και y τέτοιοι ώστε $ax + by = \delta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$a = 13 \qquad b = 16 \qquad \gcd(a, b) = 1 \qquad x = 5 \qquad y = -4$$

Αλγόριθμος του Ευκλείδη

Ο Αλγόριθμος του Ευκλείδη βρίσκει το μέγιστο κοινό διαιρέτη δυο αριθμών.

Αλγόριθμος του Ευκλείδη

```
function EUCLID(a, b)                          ▷ Υποθέτουμε ότι a > b
    if b = 0 then
        return a                               ▷ gcd(a, 0) = a
    else
        δ ← EUCLID(b, a mod b)                 ▷ gcd(a, b) = gcd(b, a mod a)
        return δ
    end if
end function
```

$$\gcd(a, b) = \begin{cases} a & \text{αν } b = 0 \\ \gcd(b, a \bmod b) & \text{αν } b > 0. \end{cases}$$

Γενικευμένος Αλγόριθμος του Ευκλείδη

Με μικρές αλλαγές ο αλγόριθμος επιστρέφει κατάλληλα x και y.

Γενικευμένος Αλγόριθμος του Ευκλείδη

function $\textsc{Euclid}(a, b)$ $\triangleright$ Υποθέτουμε ότι $a > b$
    if $b = 0$ **then**
        return $(a, 1, 0)$ $\triangleright$ $a \cdot 1 + b \cdot 0 = a$
    else
        $(\delta, x', y') \leftarrow \textsc{Euclid}(b, a \bmod b)$ $\triangleright$ $b \cdot x' + (a \bmod b) \cdot y' = \delta$
        return $(\delta, y', x' - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y')$ $\triangleright$ $x = y'$, $y = x' - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y')$
    end if
end function

$$\begin{aligned}\delta =& bx' + (a \bmod b)y' = bx' + (a - b\lfloor \frac{a}{b} \rfloor)y' \\ =& ay' + b(x' - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y').\end{aligned}$$

Μη κατασκευαστική απόδειξη

- Θα δώσουμε τώρα μια μη κατασκευαστική απόδειξη μόνο για την περίπτωση $\delta = 1$. Από αυτή προκύπτει η γενική περίπτωση. Ουσιαστικά θα δείξουμε ότι υπάρχει y τέτοιο ώστε $by = 1 \pmod{a}$.
- Θεωρούμε τους αριθμούς $by - 1 \pmod{a}$ για $y = 1, \ldots, a$.
- Όλοι αυτοί οι a αριθμοί είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.
- Ανήκουν στο $\{0, \ldots, a-1\}$. Άρα κάποιος από αυτούς είναι ίσος με 0.
- Η απόδειξη είναι μη κατασκευαστική γιατί δεν μας δίνει τροπο να βρούμε το y, εκτός από το να δοκιμάσουμε όλες τις τιμές $1, \ldots, a$.

Αρχή του Περιστερώνα

Πολλές μη κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης βασίζονται στο

Θεώρημα (Αρχή του Περιστερώνα)

Με οποιονδήποτε τρόπο να τοποθετήσουμε n περιστέρια σε $n-1$ φωλιές, θα υπάρχει πάντα μια τουλάχιστον φωλιά με 2 τουλάχιστον περιστέρια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν έχουμε $n+1$ φυσικούς αριθμούς που ανήκουν στο διάστημα $1, \dots, n$, τότε δυο τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσοι. Εδώ τα 'περιστέρια' είναι οι αριθμοί και οι 'φωλιές' οι αριθμοί $1, \dots, n$.

Αρχή του Περιστερώνα

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε την πιο γενική μορφή:

Θεώρημα (Αρχή του Περιστερώνα)

Με οποιονδήποτε τρόπο να τοποθετήσουμε n περιστέρια σε m φωλιές, θα υπάρχει πάντα μια τουλάχιστον φωλιά με $\lceil n/m \rceil$ τουλάχιστον περιστέρια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε κάθε ομάδα 13 ατόμων θα υπάρχουν δυο που γεννήθηκαν τον ίδιο μηνα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε κάθε ομάδα 100 ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 9 $(= \lceil 100/12 \rceil)$ που γεννήθηκαν τον ίδιο μήνα.

Πρόταση

Κάθε φυσικός αριθμός n έχει ένα ακέραιο πολλαπλάσιο που η δεκαδική του παράσταση αποτελείται από μια σειρά από 1 ακολουθούμενη από μια σειρά από 0, είναι δηλαδή της μορφής $11\ldots100\ldots0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για $n = 12$ υπάρχει πολλαπλάσιο αυτής της μορφής: $11100 = 12 \cdot 925$.

Απόδειξη.

Ας θεωρήσουμε τους $n+1$ αριθμούς 1, 11, 111, ..., $11\ldots1$ και τα υπόλοιπά τους $\mod n$.

Τα υπόλοιπα ανήκουν στο $\{0, \ldots, n-1\}$, άρα από την Αρχή του Περιστερώνα δυο από τους αριθμούς έχουν το ίδιο υπόλοιπο. Η διαφορά τους είναι πολλαπλάσιο του n. $\square$

Μονότονες υποακολουθίες

- Έστω μια ακολουθία αριθμών, π.χ. 6,2,4,3,7,5.

Μονότονες υποακολουθίες

- Έστω μια ακολουθία αριθμών, π.χ. 6,2,4,3,7,5.
- Κάθε ακολουθία που προκύπτει όταν αγνοήσουμε μηδέν ή περισσότερα όρους της ακολουθίας λέγεται υποακολουθία. Παράδειγμα: 6,4,3,5.

- Έστω μια ακολουθία αριθμών, π.χ. 6,2,4,3,7,5.
- Κάθε ακολουθία που προκύπτει όταν αγνοήσουμε μηδέν ή περισσότερα όρους της ακολουθίας λέγεται υποακολουθία. Παράδειγμα: 6,4,3,5.
- Μια ακολουθία λέγεται μονότονη αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα. Για παράδειγμα, η 6,4,3 είναι μονότονη, η 6,4,7 δεν είναι μονότονη.

Μονότονες υποακολουθίες

- Έστω μια ακολουθία αριθμών, π.χ. 6,2,4,3,7,5.
- Κάθε ακολουθία που προκύπτει όταν αγνοήσουμε μηδέν ή περισσότερα όρους της ακολουθίας λέγεται υποακολουθία. Παράδειγμα: 6,4,3,5.
- Μια ακολουθία λέγεται μονότονη αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα. Για παράδειγμα, η 6,4,3 είναι μονότονη, η 6,4,7 δεν είναι μονότονη.

Μονότονες υποακολουθίες

- Έστω μια ακολουθία αριθμών, π.χ. 6,2,4,3,7,5.
- Κάθε ακολουθία που προκύπτει όταν αγνοήσουμε μηδέν ή περισσότερα όρους της ακολουθίας λέγεται υποακολουθία. Παράδειγμα: 6,4,3,5.
- Μια ακολουθία λέγεται μονότονη αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα. Για παράδειγμα, η 6,4,3 είναι μονότονη, η 6,4,7 δεν είναι μονότονη.

Θεώρημα

Κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών με n^2+1 στοιχεία έχει μια μονότονη υποακολουθία με $n+1$ στοιχεία.

Μονότονες υποακολουθίες

- Έστω $t_1, \ldots, t_{n^2+1}$ μια ακολουθία. Παράδειγμα: 5,3,4,1,2.

Μονότονες υποακολουθίες

- Έστω $t_1, \ldots, t_{n^2+1}$ μια ακολουθία. Παράδειγμα: 5,3,4,1,2.
- Ορίζουμε ως α_i να είναι το μήκος της μακρύτερης αύξουσας υποακολουθίας με τελευταίο στοιχείο το t_i. Παράδειγμα: $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$.

Μονότονες υποακολουθίες

- Έστω $t_1, \ldots, t_{n^2+1}$ μια ακολουθία. Παράδειγμα: 5,3,4,1,2.
- Ορίζουμε ως α_i να είναι το μήκος της μακρύτερης αύξουσας υποακολουθίας με τελευταίο στοιχείο το t_i. Παράδειγμα: $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$.
- Ορίζουμε ως ϕ_i να είναι το μήκος της μακρύτερης φθίνουσας υποακολουθίας με τελευταίο στοιχείο το t_i. Παράδειγμα: $\phi_2 = 2$, $\phi_4 = 3$.

Μονότονες υποακολουθίες

- Έστω $t_1, \ldots, t_{n^2+1}$ μια ακολουθία. Παράδειγμα: 5,3,4,1,2.
- Ορίζουμε ως α_i να είναι το μήκος της μακρύτερης αύξουσας υποακολουθίας με τελευταίο στοιχείο το t_i. Παράδειγμα: $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$.
- Ορίζουμε ως ϕ_i να είναι το μήκος της μακρύτερης φθίνουσας υποακολουθίας με τελευταίο στοιχείο το t_i. Παράδειγμα: $\phi_2 = 2$, $\phi_4 = 3$.
- Αν $t_i \leq t_j$ για $i < j$, τότε $\alpha_i + 1 \leq \alpha_j$. Παράδειγμα: $3 < 4$, άρα $\alpha_2 + 1 \leq \alpha_3$.

Μονότονες υποακολουθίες

- Έστω $t_1, \ldots, t_{n^2+1}$ μια ακολουθία. Παράδειγμα: 5,3,4,1,2.
- Ορίζουμε ως α_i να είναι το μήκος της μακρύτερης αύξουσας υποακολουθίας με τελευταίο στοιχείο το t_i. Παράδειγμα: $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$.
- Ορίζουμε ως ϕ_i να είναι το μήκος της μακρύτερης φθίνουσας υποακολουθίας με τελευταίο στοιχείο το t_i. Παράδειγμα: $\phi_2 = 2$, $\phi_4 = 3$.
- Αν $t_i \leq t_j$ για $i < j$, τότε $\alpha_i + 1 \leq \alpha_j$. Παράδειγμα: $3 < 4$, άρα $\alpha_2 + 1 \leq \alpha_3$.
- Αν $t_i \geq t_j$ για $i < j$, τότε $\phi_i + 1 \leq \phi_j$. Παράδειγμα: $3 > 1$, άρα $\phi_2 + 1 \leq \phi_4$.

Μονότονες υποακολουθίες

- Έστω $t_1, \ldots, t_{n^2+1}$ μια ακολουθία. Παράδειγμα: 5,3,4,1,2.
- Ορίζουμε ως α_i να είναι το μήκος της μακρύτερης αύξουσας υποακολουθίας με τελευταίο στοιχείο το t_i. Παράδειγμα: $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$.
- Ορίζουμε ως ϕ_i να είναι το μήκος της μακρύτερης φθίνουσας υποακολουθίας με τελευταίο στοιχείο το t_i. Παράδειγμα: $\phi_2 = 2$, $\phi_4 = 3$.
- Αν $t_i \leq t_j$ για $i < j$, τότε $\alpha_i + 1 \leq \alpha_j$. Παράδειγμα: $3 < 4$, άρα $\alpha_2 + 1 \leq \alpha_3$.
- Αν $t_i \geq t_j$ για $i < j$, τότε $\phi_i + 1 \leq \phi_j$. Παράδειγμα: $3 > 1$, άρα $\phi_2 + 1 \leq \phi_4$.
- Αρα, τα ζεύγη (α_i, ϕ_i) είναι όλα διαφορετικά.

Μονότονες υποακολουθίες

- Έστω $t_1, \ldots, t_{n^2+1}$ μια ακολουθία. Παράδειγμα: 5,3,4,1,2.
- Ορίζουμε ως α_i να είναι το μήκος της μακρύτερης αύξουσας υποακολουθίας με τελευταίο στοιχείο το t_i. Παράδειγμα: $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$.
- Ορίζουμε ως ϕ_i να είναι το μήκος της μακρύτερης φθίνουσας υποακολουθίας με τελευταίο στοιχείο το t_i. Παράδειγμα: $\phi_2 = 2$, $\phi_4 = 3$.
- Αν $t_i \leq t_j$ για $i < j$, τότε $\alpha_i + 1 \leq \alpha_j$. Παράδειγμα: $3 < 4$, άρα $\alpha_2 + 1 \leq \alpha_3$.
- Αν $t_i \geq t_j$ για $i < j$, τότε $\phi_i + 1 \leq \phi_j$. Παράδειγμα: $3 > 1$, άρα $\phi_2 + 1 \leq \phi_4$.
- Αρα, τα ζεύγη (α_i, ϕ_i) είναι όλα διαφορετικά.
- Αν κάθε α_i και ϕ_i είναι το πολύ n, τότε υπάρχουν $n^2 + 1$ ζεύγη (α_i, ϕ_i) που παίρνουν τις n^2 τιμές $(1, 1), \ldots, (n, n)$.

Μονότονες υποακολουθίες

- Έστω $t_1, \ldots, t_{n^2+1}$ μια ακολουθία. Παράδειγμα: 5,3,4,1,2.
- Ορίζουμε ως α_i να είναι το μήκος της μακρύτερης αύξουσας υποακολουθίας με τελευταίο στοιχείο το t_i. Παράδειγμα: $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$.
- Ορίζουμε ως ϕ_i να είναι το μήκος της μακρύτερης φθίνουσας υποακολουθίας με τελευταίο στοιχείο το t_i. Παράδειγμα: $\phi_2 = 2$, $\phi_4 = 3$.
- Αν $t_i \leq t_j$ για $i < j$, τότε $\alpha_i + 1 \leq \alpha_j$. Παράδειγμα: $3 < 4$, άρα $\alpha_2 + 1 \leq \alpha_3$.
- Αν $t_i \geq t_j$ για $i < j$, τότε $\phi_i + 1 \leq \phi_j$. Παράδειγμα: $3 > 1$, άρα $\phi_2 + 1 \leq \phi_4$.
- Αρα, τα ζεύγη (α_i, ϕ_i) είναι όλα διαφορετικά.
- Αν κάθε α_i και ϕ_i είναι το πολύ n, τότε υπάρχουν $n^2 + 1$ ζεύγη (α_i, ϕ_i) που παίρνουν τις n^2 τιμές $(1, 1)$, $\ldots$, (n, n).
- Από την Αρχή του Περιστερώνα δυο από τα ζεύγη είναι ίδια, άτοπο.

Προσέγγιση αρρήτων με ρητούς

- ο αριθμός π μπορεί προσεγγιστεί σαν

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{31}{10}, \quad \frac{314}{100}, \quad \frac{3141}{1000}, \dots$$

Προσέγγιση αρρήτων με ρητούς

- ο αριθμός π μπορεί προσεγγιστεί σαν

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{31}{10}, \quad \frac{314}{100}, \quad \frac{3141}{1000}, \ldots$$

- Υπάρχει καλύτερη προσέγγιση με άλλους παρονομαστές (όχι απαραίτητα δυνάμεις του 10);

Προσέγγιση αρρήτων με ρητούς

- ο αριθμός π μπορεί προσεγγιστεί σαν

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{31}{10}, \quad \frac{314}{100}, \quad \frac{3141}{1000}, \ldots$$

- Υπάρχει καλύτερη προσέγγιση με άλλους παρονομαστές (όχι απαραίτητα δυνάμεις του 10);
- Ναι. $22/7 = 3.1428\ldots$ ή ακόμα καλύτερα $355/113 = 3.141592\ldots$

Προσέγγιση αρρήτων με ρητούς

- ο αριθμός π μπορεί προσεγγιστεί σαν

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{31}{10}, \quad \frac{314}{100}, \quad \frac{3141}{1000}, \dots$$

- Υπάρχει καλύτερη προσέγγιση με άλλους παρονομαστές (όχι απαραίτητα δυνάμεις του 10);
- Ναι. $22/7 = 3.1428\dots$ ή ακόμα καλύτερα $355/113 = 3.141592\dots$
- Έστω θ ένας άρρητος αριθμός και m ένας φυσικός αριθμός· πόσο καλά μπορούμε να προσεγγίσουμε τον θ με κλάσματα των οποίων ο παρονομαστής είναι το πολύ m;

Θεώρημα (Dirichlet)

Έστω θ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε για οποιοδήποτε φυσικό m, υπάρχουν ακέραιοι p και q, με $1 \leq q \leq m$, τέτοιοι ώστε

$$|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{mq}.$$

Απόδειξη.

- Ας πάρουμε τα ακέραια πολλαπλάσια $q\theta$, για $q = 0, 1, \ldots, m$ και ας θεωρήσουμε το δεκαδικό μέρος τους $q\theta - \lfloor q\theta \rfloor$.

Προσέγγιση αρρήτου με ρητούς

Θεώρημα (Dirichlet)

Έστω θ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε για οποιοδήποτε φυσικό m, υπάρχουν ακέραιοι p και q, με $1 \leq q \leq m$, τέτοιοι ώστε

$$|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{mq}.$$

Απόδειξη.

- Ας πάρουμε τα ακέραια πολλαπλάσια $q\theta$, για $q = 0, 1, \ldots, m$ και ας θεωρήσουμε το δεκαδικό μέρος τους $q\theta - \lfloor q\theta \rfloor$.
- Για παράδειγμα τα ακέραια πολλαπλάσια του $\sqrt{2}$ είναι 0, $1.41\ldots$, $2.82\ldots$, $4.24\ldots$ κλπ και το δεκαδικό μέρος τους είναι 0, $0.41\ldots$, $0.82\ldots$, $0.24\ldots$ κλπ.

Θεώρημα (Dirichlet)

Έστω θ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε για οποιοδήποτε φυσικό m, υπάρχουν ακέραιοι p και q, με $1 \leq q \leq m$, τέτοιοι ώστε

$$|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{mq}.$$

Απόδειξη.

- Ας πάρουμε τα ακέραια πολλαπλάσια $q\theta$, για $q = 0, 1, \ldots, m$ και ας θεωρήσουμε το δεκαδικό μέρος τους $q\theta - \lfloor q\theta \rfloor$.
- Για παράδειγμα τα ακέραια πολλαπλάσια του $\sqrt{2}$ είναι 0, 1.41 . . ., 2.82 . . ., 4.24 . . . κλπ και το δεκαδικό μέρος τους είναι 0, 0.41 . . ., 0.82 . . ., 0.24 . . . κλπ.
- Οι αριθμοί αυτοί είναι της μορφής $q\theta - p$, όπου q και $p = \lfloor q\theta \rfloor$ είναι ακέραιοι.

Προσέγγιση αρρήτου με ρητούς

Συνέχεια.

- Για $q = 0, 1, \ldots, m$ υπάρχουν $m + 1$ τέτοιοι αριθμοί και όλοι βρίσκονται στο διάστημα $[0, 1)$.

Προσέγγιση αρρήτου με ρητούς

Συνέχεια.

- Για $q = 0, 1, \ldots, m$ υπάρχουν $m + 1$ τέτοιοι αριθμοί και όλοι βρίσκονται στο διάστημα $[0, 1)$.
- Αν θεωρήσουμε τους αριθμούς αυτούς ως περιστέρια και τα διαστήματα $[0, 1/m)$, $[1/m, 2/m)$, $\ldots$, $[(m-1)/m, 1)$ ως φωλιές, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή του Περιστερώνα.

Προσέγγιση αρρήτου με ρητούς

Συνέχεια.

- Για $q = 0, 1, \ldots, m$ υπάρχουν $m+1$ τέτοιοι αριθμοί και όλοι βρίσκονται στο διάστημα $[0, 1)$.
- Αν θεωρήσουμε τους αριθμούς αυτούς ως περιστέρια και τα διαστήματα $[0, 1/m)$, $[1/m, 2/m)$, $\ldots$, $[(m-1)/m, 1)$ ως φωλιές, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή του Περιστερώνα.
- Κάποια φωλιά θα περιέχει δυο περιστέρια. Άρα υπάρχουν δυο αριθμοί $q_1\theta - p_1$ και $q_2\theta - p_2$ που διαφέρουν λιγότερο από $1/m$, δηλαδή $|(q_2 - q_1)\theta - (p_2 - p_1)| < 1/m$.

Προσέγγιση αρρήτου με ρητούς

Συνέχεια.

- Για $q = 0, 1, \ldots, m$ υπάρχουν $m + 1$ τέτοιοι αριθμοί και όλοι βρίσκονται στο διάστημα $[0, 1)$.
- Αν θεωρήσουμε τους αριθμούς αυτούς ως περιστέρια και τα διαστήματα $[0, 1/m)$, $[1/m, 2/m)$, ..., $[(m-1)/m, 1)$ ως φωλιές, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή του Περιστερώνα.
- Κάποια φωλιά θα περιέχει δυο περιστέρια. Άρα υπάρχουν δυο αριθμοί $q_1\theta - p_1$ και $q_2\theta - p_2$ που διαφέρουν λιγότερο από $1/m$, δηλαδή $|(q_2 - q_1)\theta - (p_2 - p_1)| < 1/m$.
- Ας θέσουμε $q = q_2 - q_1$ και $p = p_2 - p_1$. Οι p και q είναι ακέραιοι στο διάστημα $1 \leq q \leq m$.

Προσέγγιση αρρήτου με ρητούς

Συνέχεια.

- Για $q = 0, 1, \dots, m$ υπάρχουν $m+1$ τέτοιοι αριθμοί και όλοι βρίσκονται στο διάστημα $[0, 1)$.
- Αν θεωρήσουμε τους αριθμούς αυτούς ως περιστέρια και τα διαστήματα $[0, 1/m)$, $[1/m, 2/m)$, $\dots$, $[(m-1)/m, 1)$ ως φωλιές, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή του Περιστερώνα.
- Κάποια φωλιά θα περιέχει δυο περιστέρια. Άρα υπάρχουν δυο αριθμοί $q_1\theta - p_1$ και $q_2\theta - p_2$ που διαφέρουν λιγότερο από $1/m$, δηλαδή $|(q_2 - q_1)\theta - (p_2 - p_1)| < 1/m$.
- Ας θέσουμε $q = q_2 - q_1$ και $p = p_2 - p_1$. Οι p και q είναι ακέραιοι στο διάστημα $1 \le q \le m$.

$$|q\theta - p| < 1/m \Rightarrow |\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{mq}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} \qquad \pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$

Πρόταση

Τα συνεχή κλάσματα δίνουν την καλύτερη προσέγγιση αρρήτου από ρητούς όταν μας ενδιαφέρει να έχουμε μικρό αριθμητή και παρονομαστή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\sqrt{2} \approx 1$$

Κατασκευαστική προσέγγιση αρρήτου με ρητούς

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx 1\\ &\approx 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1.5\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx 1 \\ &\approx 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 \\ &\approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1.4\end{aligned}$$

Κατασκευαστική προσέγγιση αρρήτου με ρητούς

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &\approx 1 \\
&\approx 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 \\
&\approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1.4 \\
&\approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1.41667
\end{aligned}$$

Προσέγγιση αρρήτων με κοινό παρονομαστή

Θέλουμε την κοινή προσέγγιση πολλών άρρητων αριθμών με ρητούς που να έχουν κοινό παρονομαστή ώστε να είναι εύκολη η πρόσθεση και η αφαίρεση τους. Για παράδειγμα, μια κοινή προσέγγιση του $\sqrt{2} = 1.414\ldots$ και του $\sqrt{3} = 1.732\ldots$ είναι $7/5 = 1.4$ και $9/5 = 1.8$, αντίστοιχα.

Προσέγγιση αρρήτων με κοινό παρονομαστή

Θέλουμε την κοινή προσέγγιση πολλών άρρητων αριθμών με ρητούς που να έχουν κοινό παρονομαστή ώστε να είναι εύκολη η πρόσθεση και η αφαίρεση τους. Για παράδειγμα, μια κοινή προσέγγιση του $\sqrt{2} = 1.414\ldots$ και του $\sqrt{3} = 1.732\ldots$ είναι $7/5 = 1.4$ και $9/5 = 1.8$, αντίστοιχα.

Θεώρημα

Έστω $\theta_1, \ldots, \theta_n$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο m, υπάρχουν ακέραιοι $p_1, \ldots, p_n$ και q, με $1 \leq q \leq m^n$, τέτοιοι ώστε

$$|\theta_i - \frac{p_i}{q}| < \frac{1}{mq}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Προσέγγιση αρρήτων με κοινό παρονομαστή

Θέλουμε την κοινή προσέγγιση πολλών άρρητων αριθμών με ρητούς που να έχουν κοινό παρονομαστή ώστε να είναι εύκολη η πρόσθεση και η αφαίρεση τους. Για παράδειγμα, μια κοινή προσέγγιση του $\sqrt{2} = 1.414\ldots$ και του $\sqrt{3} = 1.732\ldots$ είναι $7/5 = 1.4$ και $9/5 = 1.8$, αντίστοιχα.

Θεώρημα

Έστω $\theta_1, \ldots, \theta_n$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο m, υπάρχουν ακέραιοι $p_1, \ldots, p_n$ και q, με $1 \leq q \leq m^n$, τέτοιοι ώστε

$$|\theta_i - \frac{p_i}{q}| < \frac{1}{mq}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Ο μόνος αλγόριθμος που έχουμε για να βρίσκει τέτοιους p_i και q, είναι να δοκιμάσουμε όλες τις m^n δυνατές τιμές του q.

Άλλα μη κατασκευαστικά θεωρήματα ύπαρξης

- Θεώρημα Brouwer. Fixed point theorem.

Άλλα μη κατασκευαστικά θεωρήματα ύπαρξης

- Θεώρημα Brouwer. Fixed point theorem.
- Θεώρημα Nash στη Θεωρία Παιγνίων.

Άλλα μη κατασκευαστικά θεωρήματα ύπαρξης

- Θεώρημα Brouwer. Fixed point theorem.
- Θεώρημα Nash στη Θεωρία Παιγνίων.
- Θεώρημα Arrow-Debreu στα Οικονομικά Μαθηματικά.