Μαθηματικά Πληροφορικής

2ο Μάθημα

Ηλίας Κουτσουπιάς

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
elias@@di.uoa.gr

Γενικό πλάνο

Μορφές αποδείξεων

Υπάρχουν πολλά είδη αποδείξεων. Εδώ θα δούμε τα πιο κοινά:

- Εξαντλητική μέθοδος ή μέθοδος επισκόπησης. Όταν το πρόβλημα έχει πεπερασμένο αριθμό περιπτώσεων, τις εξετάζουμε όλες.

Μορφές αποδείξεων

Υπάρχουν πολλά είδη αποδείξεων. Εδώ θα δούμε τα πιο κοινά:

- Εξαντλητική μέθοδος ή μέθοδος επισκόπησης. Όταν το πρόβλημα έχει πεπερασμένο αριθμό περιπτώσεων, τις εξετάζουμε όλες.
- Μαθηματική επαγωγή. Έστω μια πρόταση $P(n)$ που ισχύει για $n = 1$. Αν η $P(n)$ συνεπάγεται την $P(n+1)$, τότε η πρόταση ισχύει για όλους τους φυσικούς.

Μορφές αποδείξεων

Υπάρχουν πολλά είδη αποδείξεων. Εδώ θα δούμε τα πιο κοινά:

- Εξαντλητική μέθοδος ή μέθοδος επισκόπησης. Όταν το πρόβλημα έχει πεπερασμένο αριθμό περιπτώσεων, τις εξετάζουμε όλες.
- Μαθηματική επαγωγή. Έστω μια πρόταση $P(n)$ που ισχύει για $n = 1$. Αν η $P(n)$ συνεπάγεται την $P(n+1)$, τότε η πρόταση ισχύει για όλους τους φυσικούς.
- Αναδρομική επαγωγή. Επαγωγή όχι στους φυσικούς αριθμούς αλλά σε μια δομή που ορίζεται αναδρομικά.

Μορφές αποδείξεων (συνέχεια)

- Κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Δείχνουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου δίνοντας ένα αλγόριθμο που το παράγει. Στην ιδία κατηγορία ανήκει και η απόδειξη με αντιπαράδειγμα.

Μορφές αποδείξεων (συνέχεια)

- Κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Δείχνουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου δίνοντας ένα αλγόριθμο που το παράγει. Στην ιδία κατηγορία ανήκει και η απόδειξη με αντιπαράδειγμα.
- Μη κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Τέτοιες αποδείξεις χρησιμοποιούν

Μορφές αποδείξεων (συνέχεια)

- Κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Δείχνουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου δίνοντας ένα αλγόριθμο που το παράγει. Στην ιδία κατηγορία ανήκει και η απόδειξη με αντιπαράδειγμα.
- Μη κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Τέτοιες αποδείξεις χρησιμοποιούν
  - την αρχή του περιστερώνα και τις γενικεύσεις του

Μορφές αποδείξεων (συνέχεια)

- Κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Δείχνουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου δίνοντας ένα αλγόριθμο που το παράγει. Στην ιδία κατηγορία ανήκει και η απόδειξη με αντιπαράδειγμα.
- Μη κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Τέτοιες αποδείξεις χρησιμοποιούν
  - την αρχή του περιστερώνα και τις γενικεύσεις του
  - κατάλληλη καταμέτρηση

Μορφές αποδείξεων (συνέχεια)

- Κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Δείχνουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου δίνοντας ένα αλγόριθμο που το παράγει. Στην ιδία κατηγορία ανήκει και η απόδειξη με αντιπαράδειγμα.
- Μη κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Τέτοιες αποδείξεις χρησιμοποιούν
  - την αρχή του περιστερώνα και τις γενικεύσεις του
  - κατάλληλη καταμέτρηση
  - την πιθανοτική μέθοδο που βασίζεται στο ότι ένα στοιχείο υπάρχει όταν έχει μη μηδενική πιθανότητα ύπαρξης.

Μορφές αποδείξεων (συνέχεια)

- Κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Δείχνουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου δίνοντας ένα αλγόριθμο που το παράγει. Στην ιδία κατηγορία ανήκει και η απόδειξη με αντιπαράδειγμα.
- Μη κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης. Τέτοιες αποδείξεις χρησιμοποιούν
  - την αρχή του περιστερώνα και τις γενικεύσεις του
  - κατάλληλη καταμέτρηση
  - την πιθανοτική μέθοδο που βασίζεται στο ότι ένα στοιχείο υπάρχει όταν έχει μη μηδενική πιθανότητα ύπαρξης.
  - την διαγωνιοποίηση του Cantor.

Εξαντλητική μέθοδος

- Σε αυτό το είδος απόδειξης θεωρούμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και τις ελέγχουμε όλες. Αν ο αριθμός των περιπτώσεων είναι πεπερασμένος (και σχετικά μικρός) τότε αυτή είναι συνήθως η πιο κατάλληλη μέθοδος. Σήμερα που έχουμε στη διάθεση μας ισχυρούς υπολογιστές, αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλά προβλήματα.
- Ας δούμε μερικά παραδείγματα τέτοιων αποδείξεων.

Σκύλος-κατσίκα-χορτάρι

- Ένας βοσκός έχει ένα άγριο σκύλο, μια κατσίκα και ένα δεμάτι χορτάρι και θέλει να χρησιμοποιήσει μια βάρκα για να διασχίσει ένα ποτάμι. Το πρόβλημα είναι ότι η βάρκα είναι μικρή και χωράει μόνο το βοσκό και ένα από τα 3 πράγματα ή ζώα που θέλει να μεταφέρει απέναντι. Επιπλέον ο σκύλος θα φάει την κατσίκα και η κατσίκα το χορτάρι αν μείνουν χωρίς το βοσκό στην ίδια όχθη.

Σκύλος-κατσίκα-χορτάρι

- Ένας βοσκός έχει ένα άγριο σκύλο, μια κατσίκα και ένα δεμάτι χορτάρι και θέλει να χρησιμοποιήσει μια βάρκα για να διασχίσει ένα ποτάμι. Το πρόβλημα είναι ότι η βάρκα είναι μικρή και χωράει μόνο το βοσκό και ένα από τα 3 πράγματα ή ζώα που θέλει να μεταφέρει απέναντι. Επιπλέον ο σκύλος θα φάει την κατσίκα και η κατσίκα το χορτάρι αν μείνουν χωρίς το βοσκό στην ίδια όχθη.
- Υπάρχει λυση;

Σκύλος-κατσίκα-χορτάρι

- Ένας βοσκός έχει ένα άγριο σκύλο, μια κατσίκα και ένα δεμάτι χορτάρι και θέλει να χρησιμοποιήσει μια βάρκα για να διασχίσει ένα ποτάμι. Το πρόβλημα είναι ότι η βάρκα είναι μικρή και χωράει μόνο το βοσκό και ένα από τα 3 πράγματα ή ζώα που θέλει να μεταφέρει απέναντι. Επιπλέον ο σκύλος θα φάει την κατσίκα και η κατσίκα το χορτάρι αν μείνουν χωρίς το βοσκό στην ίδια όχθη.
- Υπάρχει λυση;
- Ναι. Μπορούμε να τη βρούμε αν δοκιμάσουμε όλους τους συνδυασμούς.

Σκάκι

- Στα προβλήματα *'Ματ σε 3 κινήσεις'* μπορούμε να δοκιμάσουμε όλες τις περιπτώσεις.

Σκάκι

- Στα προβλήματα *'Ματ σε 3 κινήσεις'* μπορούμε να δοκιμάσουμε όλες τις περιπτώσεις.
- Είναι εφικτά σήμερα τα προβλήματα της μορφής *'Ματ σε 7 κινήσεις'*;

Σκάκι

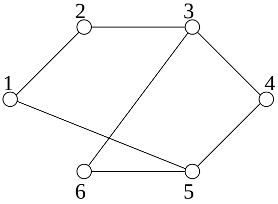
- Στα προβλήματα *'Ματ σε 3 κινήσεις'* μπορούμε να δοκιμάσουμε όλες τις περιπτώσεις.
- Είναι εφικτά σήμερα τα προβλήματα της μορφής *'Ματ σε 7 κινήσεις'*;
- *Δίνεται η αρχική σκακιέρα. Ματ σε 137 κινήσεις.* Αυτό το πρόβλημα είναι πεπερασμένο, αλλά όχι υπολογιστικά εφικτό.

Ramsey numbers

Πρόταση

Σε κάθε ομάδα 6 ατόμων

- *είτε υπάρχουν 3 που γνωρίζονται ανά δυο*
- *είτε υπάρχουν 3 που είναι άγνωστοι ανά δυο.*



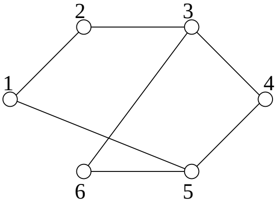
- Απόδειξη: Δοκίμασε όλες τις περιπτώσεις.

Ramsey numbers

Πρόταση

Σε κάθε ομάδα 6 ατόμων

- *είτε υπάρχουν 3 που γνωρίζονται ανά δυο*
- *είτε υπάρχουν 3 που είναι άγνωστοι ανά δυο.*



- Απόδειξη: Δοκίμασε όλες τις περιπτώσεις.
- Το παραπάνω δεν ισχύει για κάθε ομάδα 5 ατόμων.
  Αντιπαράδειγμα: Οι πέντε κάθονται σε ένα κυκλικό τραπέζι και ο καθένας γνωρίζει μόνο τους διπλανούς του.

Μπορούμε να γενικεύσουμε την πρόταση

Θεώρημα

Σε καθε σύνολο 18 ατόμων είτε υπάρχουν 4 που γνωρίζονται **ανά** *δυο είτε υπάρχουν 4 που είναι* **άγνωστοι ανά** *δυο.*

Απόδειξη.

Δοκίμασε όλες τις περιπτώσεις. Όμως τώρα οι περιπτώσεις είναι πάρα πολλές. □

Θεώρημα

Σε κάθε σύνολο 49 ατόμων είτε υπάρχουν 5 που γνωρίζονται **ανά** *δυο είτε υπάρχουν 5 που είναι* **άγνωστοι ανά** *δυο.*

Απόδειξη.

Η εξαντλητική μέθοδος δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί γιατί σήμερα είναι υπολογιστικά ανέφικτη. □

Μαθηματική επαγωγή

Έστω $P(n)$ μια υπόθεση που αφορά τους φυσικούς αριθμούς. Για να αποδείξουμε την υπόθεση με επαγωγή

- Δείχνουμε ότι ισχύει για $n = 1$: $P(1)$
- Δείχνουμε για κάθε n: αν ισχύει για n τότε θα ισχύει για $n + 1$:

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

Παράδειγμα - H_k

- Ο αρμονικός αριθμός H_k ορίζεται σαν

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{k}$$

- Τι μεγέθους είναι ο H_k;

Παράδειγμα - H_k

Λήμμα

Να δειχτεί ότι για κάθε φυσικό n: $H_{2^n} \leq 1 + n$.

Απόδειξη.

Βάση της επαγωγής: Για $n = 1$ έχουμε $H_{2^1} = H_2 = 3/2$ και $1 + n = 2$ και επομένως το λήμμα ισχύει: $3/2 \leq 2$.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό n: $H_{2^n} \leq 1 + n$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n + 1$, δηλαδή ότι $H_{2^{n+1}} \leq 1 + (n + 1)$. □

Παράδειγμα - H_k

Απόδειξη (συνέχ.)

Έχουμε

$$\begin{aligned}
H_{2^{n+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}) + (\frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}) \\
&= H_{2^n} + (\frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}) \\
&\leq (1 + n) + (\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}) \\
&= (1 + n) + 2^n \frac{1}{2^n} = (1 + n) + 1 = 1 + (n + 1).
\end{aligned}$$

□

Μαθηματική επαγωγή - γενικεύσεις

Κάποιες κοινές παραλλαγές της επαγωγής

- Η βασική περίπτωση δεν είναι πάντα για $n = 1$. Για παράδειγμα για θεωρήματα της μορφής 'Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 4$: ...' η βάση είναι $n = 4$.

Μαθηματική επαγωγή - γενικεύσεις

Κάποιες κοινές παραλλαγές της επαγωγής

- Η βασική περίπτωση δεν είναι πάντα για $n = 1$. Για παράδειγμα για θεωρήματα της μορφής 'Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 4$: ...' η βάση είναι $n = 4$.
- Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι η πρόταση ισχύει για **όλους** τους μικρότερους αριθμούς:

$$P(1), \ldots, P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

Οι αριθμοί Fibonacci

Οι αριθμοί Fibonacci ορίζονται ως εξής:

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1,$$

και για κάθε $n \geq 2$:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Λήμμα

Να δειχτεί ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$,

$$F_n \leq \phi^n,$$

όπου $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$ είναι η χρυσή τομή.

Θεώρημα

Για κάθε θετικό ακέραιο n: $\frac{1}{2}\phi^n \leq F_n \leq \phi^n$.

Θεώρημα

Να δειχτεί ότι για κάθε ακέραιους $n, m \geq 0$, οι αριθμοί Fibonacci ικανοποιούν την

$$F_{n+m} = F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1}.$$

Το Θεώρημα αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε ένα αριθμό Fibonacci χωρίς να υπολογίσουμε όλους τους προηγούμενους.

$$F_{2k+1} = F_{k+1}F_k + F_k F_{k-1} = (F_k + F_{k-1})F_k + F_k F_{k-1} = F_k^2 + 2F_k F_{k-1}$$

$$F_{2k} = F_k F_k + F_{k-1}F_{k-1} = F_k^2 + F_{k-1}^2$$

Παράδειγμα:

$$F_{31} = F_{15}^2 + 2F_{15}F_{14}$$

$$F_{15} = F_7^2 + 2F_7 F_6$$

$$F_{14} = F_7^2 + F_6^2$$

$$F_7 = \ldots$$

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

$$\gcd(a,b) = \begin{cases} a & \text{αν } b = 0 \\ \gcd(b, a \bmod b) & \text{αν } b > 0. \end{cases}$$

Αλγόριθμος του Ευκλείδη

function $\textsc{Euclid}(a, b)$ $\triangleright$ Υποθέτουμε ότι $a \geq b$
 if $b = 0$ **then**
  return a $\triangleright$ $gcd(a, 0) = a$
 else
  $\delta \leftarrow \textsc{Euclid}(b, a \bmod b)$ $\triangleright$ $gcd(a, b) = gcd(b, a \bmod a)$
  return δ
 end if
end function

Ανάλυση του Αλγορίθμου του Ευκλείδη

- Πόσα βήματα κάνει ο αλγόριθμος για να υπολογίσει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη δυο αριθμών; Εξαρτάται από τους αριθμούς φυσικά, αλλά θέλουμε να έχουμε μια εκτίμηση για τη χειρότερη περίπτωση.
- Το Θεώρημα του Lamé λέει ότι ο αριθμός των διαιρέσεων, ή ισοδύναμα οι φορές που υπολογίζουμε το $a \bmod b$, είναι το πολύ 5 φορές ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων του b.
- Εδώ θα δείξουμε ένα παραπλήσιο αποτέλεσμα.

Θεώρημα

Για κάθε θετικούς ακέραιους a, b με $a \geq 2$ και $a \geq b$, ο αριθμός των διαιρέσεων του αλγόριθμου του Ευκλείδη δεν ξεπερνά το $2 \log a$.

Ισχυροποίηση της επαγωγικής υπόθεσης

Μια χρήσιμη τεχνική για να αποδείξουμε μια πρόταση με μαθηματική επαγωγή είναι να ισχυροποιήσουμε την επαγωγική υπόθεση.
Παράδειγμα:

Πρόταση

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2.$

Απόδειξη.

Ας χρησιμοποιήσουμε επαγωγή και ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάποιο n. Προσθέτουμε και στα δυο μέλη το $\frac{1}{(n+1)^2}$. Αλλά, τώρα το δεξί μέλος είναι $2 + \frac{1}{(n+1)^2}$ που δεν είναι μικρότερο του 2. Η προσέγγιση αυτή αποτυγχάνει.
Είναι εύκολο όμως να δείξουμε την πιο ισχυρή πρόταση

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}. \qquad \square$$

Θεώρημα (Ramsey)

Για κάθε φυσικό k, υπάρχει φυσικός R_k τέτοιος ώστε κάθε γράφος με R_k ή περισσότερους κόμβους περιέχει είτε ένα πλήρη υπογράφο με k κόμβους είτε ένα κενό υπογράφο με k κόμβους.

Αν προσπαθήσουμε να αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή δεν θα τα καταφέρουμε γιατί η πρόταση για κάποιο k δεν συνεπάγεται την πρόταση για κάποιο $k+1$.
Αν όμως γενικεύσουμε το θεώρημα, τότε μπορούμε να το αποδείξουμε με επαγωγή.

Θεώρημα (Ramsey)

Για κάθε θετικούς ακέραιους k, m υπάρχει φυσικός $R_{k,m}$ τέτοιος ώστε κάθε γράφος με $R_{k,m}$ ή περισσότερους κόμβους περιέχει είτε ένα πλήρη υπογράφο με k κόμβους είτε ένα κενό υπογράφο με m κόμβους.