

# Μαθηματικά Πληροφορικής

## 1ο Μάθημα

Ηλίας Κουτσοπιάς

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών  
Πανεπιστήμιο Αθηνών  
elias@@di.uoa.gr

2 Νοεμβρίου 2011

- 1 Σχετικά με το μάθημα
- 2 Υποθέσεις - Εικασίες - Θεωρήματα
- 3 Εικασίες

- Το μάθημα πραγματεύεται θέματα μαθηματικών που είναι χρήσιμα στην πληροφορική και τις τηλεπικοινωνίες
- Μέσα από εφαρμογές θα προσπαθήσουμε να μάθουμε τεχνικές που είναι χρήσιμες στην ανάλυση και σχεδίαση πληροφορικών συστημάτων.

- Σελίδα του μαθήματος:  
<http://theory.di.uoa.gr/classes/Math4CS-11f>
- Απαιτήσεις:
  - Ασκήσεις (30%)
  - Τελικό διαγώνισμα (80%)
  - Απαιτείται τουλάχιστον 4 και στις ασκήσεις και στο τελικό διαγώνισμα.
- Αντιγραφή, ακόμα και στις ασκήσεις, συνεπάγεται μηδενισμό στην τάξη για το τρέχον ακαδημαϊκό έτος - για όλες τις εξεταστικές περιόδους.
- Τις ασκήσεις πρέπει να προσπαθείτε να τις κάνετε μόνοι σας. Επιτρέπεται και ενθαρρύνεται να τις συζητήσετε με άλλους, όχι όμως να αντιγράψετε τις λύσεις. Τις λύσεις πρέπει να τις βρείτε και να τις γράψετε μόνοι σας.

Τα δωρεάν συγγράμματα είναι

- Kenneth H. Rosen. Διακριτά μαθηματικά και εφαρμογές τους. Εκδόσεις Τζιόλα, 2008
- Βουτσαδάκης Γιώργος, Κυρούσης Λευτέρης, Μπούρας Χρήστος, Σπυράκης Πάυλος. Διακριτά μαθηματικά και εφαρμογές τους. Εκδόσεις Gutenberg, 2008

Υπάρχουν επίσης πολύ καλά εγχειρίδια στην Αγγλική γλώσσα που καλύπτουν μεγάλο μέρος της ύλης του μαθήματος, όπως τα:

- Kenneth H. Rosen. Discrete Mathematics and its Applications.
- Lazlo Lovasz, Jozsef Pelikan, Katalin Vesztergombi. Discrete Mathematics.
- Eric Lehman and Tom Leighton. Mathematics for Computer Science. Μπορείτε να το βρείτε online.

- Στα μαθηματικά και στις άλλες επιστήμες κάνουμε συχνά υποθέσεις. Όταν δείξουμε ότι μια υπόθεση είναι αληθής, τότε την ονομάζουμε θεώρημα ή πρόταση.

- Στα μαθηματικά και στις άλλες επιστήμες κάνουμε συχνά υποθέσεις. Όταν δείξουμε ότι μια υπόθεση είναι αληθής, τότε την ονομάζουμε θεώρημα ή πρόταση.
- Τα μαθηματικά που διδασκόμαστε στο σχολείο και στο Πανεπιστήμιο, αποτελούνται συνήθως από ορισμούς, θεωρήματα και αποδείξεις που μας 'σερβίρονται' έτοιμες.

- Στα μαθηματικά και στις άλλες επιστήμες κάνουμε συχνά υποθέσεις. Όταν δείξουμε ότι μια υπόθεση είναι αληθής, τότε την ονομάζουμε θεώρημα ή πρόταση.
- Τα μαθηματικά που διδασκόμαστε στο σχολείο και στο Πανεπιστήμιο, αποτελούνται συνήθως από ορισμούς, θεωρήματα και αποδείξεις που μας 'σερβίρονται' έτοιμες.
- Η πιο ενδιαφέρουσα πλευρά των μαθηματικών είναι όταν εξερευνούμε τα σύνορα της γνώσης. Εκεί πρέπει να κάνουμε υποθέσεις και μετά να τις αποδείξουμε ή να τις καταρρίψουμε.



- Στα μαθηματικά και στις άλλες επιστήμες κάνουμε συχνά υποθέσεις. Όταν δείξουμε ότι μια υπόθεση είναι αληθής, τότε την ονομάζουμε θεώρημα ή πρόταση.
- Τα μαθηματικά που διδασκόμαστε στο σχολείο και στο Πανεπιστήμιο, αποτελούνται συνήθως από ορισμούς, θεωρήματα και αποδείξεις που μας 'σερβίρονται' έτοιμες.
- Η πιο ενδιαφέρουσα πλευρά των μαθηματικών είναι όταν εξερευνούμε τα σύνορα της γνώσης. Εκεί πρέπει να κάνουμε υποθέσεις και μετά να τις αποδείξουμε ή να τις καταρρίψουμε.
- Υπόθεση  $\longleftrightarrow$  Απόδειξη  $\longleftrightarrow$  Θεώρημα

- Πολλές φορές, όταν δεν μπορούμε να αποδείξουμε μια υπόθεση, την αναθεωρούμε.

- Πολλές φορές, όταν δεν μπορούμε να αποδείξουμε μια υπόθεση, την αναθεωρούμε.
- Άλλες φορές, όταν καταφέρνουμε να αποδείξουμε μια υπόθεση, η ίδια η απόδειξη μας βοηθάει να γενικεύσουμε την πρόταση.

# Η μαγεία της χρυσής τομής

Ας παίξουμε λίγο με τη χρυσή τομή, τον αριθμό  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$ , για τον οποίο ισχύει  $\phi^2 = \phi + 1$ . Ας πολλαπλασιάσουμε το  $\phi$  και το  $\phi^2$  τους φυσικούς αριθμούς.

$1 \cdot \phi = 1.618\dots$	$1 \cdot \phi^2 = 2.618$
$2 \cdot \phi = 3.236\dots$	$2 \cdot \phi^2 = 5.236$
$3 \cdot \phi = 4.854\dots$	$3 \cdot \phi^2 = 7.854$
$4 \cdot \phi = 6.472\dots$	$4 \cdot \phi^2 = 10.472$
$5 \cdot \phi = 8.090\dots$	$5 \cdot \phi^2 = 13.090$
$6 \cdot \phi = 9.708\dots$	$6 \cdot \phi^2 = 15.708$

# Η μαγεία της χρυσής τομής

- Παρατηρείστε πως στα ακέραια μέρη των γινομένων φαίνεται ότι εμφανίζονται όλοι οι φυσικοί αριθμοί  $1, 2, 3, \dots$

# Η μαγεία της χρυσής τομής

- Παρατηρείστε πως στα ακέραια μέρη των γινομένων φαίνεται ότι εμφανίζονται όλοι οι φυσικοί αριθμοί  $1, 2, 3, \dots$
- Είναι όμως αλήθεια; Για να απαντήσουμε πρέπει πρώτα να διατυπώσουμε με σαφήνεια την υπόθεση και μετά να προσπαθήσουμε να την αποδείξουμε ή καταρρίψουμε.

# Η μαγεία της χρυσής τομής

- Παρατηρείστε πως στα ακέραια μέρη των γινομένων φαίνεται ότι εμφανίζονται όλοι οι φυσικοί αριθμοί  $1, 2, 3, \dots$
- Είναι όμως αλήθεια; Για να απαντήσουμε πρέπει πρώτα να διατυπώσουμε με σαφήνεια την υπόθεση και μετά να προσπαθήσουμε να την αποδείξουμε ή καταρρίψουμε.
- *Υπόθεση: Για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , υπάρχει ακριβώς ένας φυσικός αριθμός  $k$  τέτοιος ώστε  $n = \lfloor k\phi \rfloor$  ή  $n = \lfloor k\phi^2 \rfloor$ .*

# Η μαγεία της χρυσής τομής

- Ας δοκιμάσουμε να καταρρίψουμε την υπόθεση. Έχουμε ευτυχώς το κατάλληλο εργαλείο, τον υπολογιστή. Ας πάρουμε ένα μεγάλο 'τυχαίο'  $n$ , π.χ.  $n = 1000$ , και ας δοκιμάσουμε τα  $k$  που είναι κοντά στα  $n/\phi$  και  $n/\phi^2$ . Βρίσκουμε ότι η υπόθεση ισχύει για αυτό το  $n$ .



# Η μαγεία της χρυσής τομής

- Ας δοκιμάσουμε να καταρρίψουμε την υπόθεση. Έχουμε ευτυχώς το κατάλληλο εργαλείο, τον υπολογιστή. Ας πάρουμε ένα μεγάλο 'τυχαίο'  $n$ , π.χ.  $n = 1000$ , και ας δοκιμάσουμε τα  $k$  που είναι κοντά στα  $n/\phi$  και  $n/\phi^2$ . Βρίσκουμε ότι η υπόθεση ισχύει για αυτό το  $n$ .
- Αφού έχουμε πειστεί αρκετά για την αλήθεια της υπόθεσης ας προσπαθήσουμε να την αποδείξουμε.

- Ορίζουμε τα σύνολα  $A = \{ \lfloor k\phi \rfloor : k = 1, 2, \dots \}$  και  $B = \{ \lfloor k\phi^2 \rfloor : k = 1, 2, \dots \}$ .

- Ορίζουμε τα σύνολα  $A = \{ \lfloor k\phi \rfloor : k = 1, 2, \dots \}$  και  $B = \{ \lfloor k\phi^2 \rfloor : k = 1, 2, \dots \}$ .
- Για κάθε φυσικό  $n$  ορίζουμε το υποσύνολο  $A_n$  και  $B_n$  να είναι τα στοιχεία των  $A$  και  $B$  που δεν ξεπερνούν το  $n$ .

- Ορίζουμε τα σύνολα  $A = \{ \lfloor k\phi \rfloor : k = 1, 2, \dots \}$  και  $B = \{ \lfloor k\phi^2 \rfloor : k = 1, 2, \dots \}$ .
- Για κάθε φυσικό  $n$  ορίζουμε το υποσύνολο  $A_n$  και  $B_n$  να είναι τα στοιχεία των  $A$  και  $B$  που δεν ξεπερνούν το  $n$ .
- Πόσα στοιχεία έχει το  $A_n$ ; Όσα είναι οι φυσικοί  $k$  για τα όποιους ισχύει

$$\lfloor k\phi \rfloor \leq n \Leftrightarrow k\phi < n+1 \Leftrightarrow k < \frac{n+1}{\phi} \Leftrightarrow k \leq \left\lfloor \frac{n+1}{\phi} \right\rfloor.$$

Δηλαδή, ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου  $A_n$  είναι  $|A_n| = \left\lfloor \frac{n+1}{\phi} \right\rfloor$ . Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε  $|B_n| = \left\lfloor \frac{n+1}{\phi^2} \right\rfloor$ .

- Ο αριθμός λοιπόν των στοιχείων και του  $A_n$  και του  $B_n$  είναι

$$\left\lfloor \frac{n+1}{\phi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{\phi^2} \right\rfloor.$$

- Ο αριθμός λοιπόν των στοιχείων και του  $A_n$  και του  $B_n$  είναι

$$\left\lfloor \frac{n+1}{\phi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{\phi^2} \right\rfloor.$$

- Με λίγη σκέψη καταλήγουμε ότι η αρχική υπόθεση ισχύει αν και μόνο αν αυτός ο αριθμός είναι ίσος με  $n$ , δηλαδή:

$$\left\lfloor \frac{n+1}{\phi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{\phi^2} \right\rfloor = n.$$

- Παρατηρούμε ότι το  $\phi$  έχει την ιδιότητα

$$\frac{n+1}{\phi} + \frac{n+1}{\phi^2} = n+1.$$

- Παρατηρούμε ότι το  $\phi$  έχει την ιδιότητα

$$\frac{n+1}{\phi} + \frac{n+1}{\phi^2} = n+1.$$

- Οι δυο αριθμοί  $\frac{n+1}{\phi}$  και  $\frac{n+1}{\phi^2}$  έχουν άθροισμα  $n+1$  και δεν είναι ακέραιοι. Άρα τα ακέραια μέρη τους έχουν άθροισμα  $n$ .



- Ποια ιδιότητα του  $\phi$  και του  $\phi^2$  χρησιμοποιήσαμε στην παραπάνω απόδειξη;

- Ποια ιδιότητα του  $\phi$  και του  $\phi^2$  χρησιμοποιήσαμε στην παραπάνω απόδειξη;
- Μόνο ότι

$$\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$$

και ότι είναι άρρητοι.

- Ποια ιδιότητα του  $\phi$  και του  $\phi^2$  χρησιμοποιήσαμε στην παραπάνω απόδειξη;
- Μόνο ότι

$$\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$$

και ότι είναι άρρητοι.

- Η ίδια λοιπόν απόδειξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε το πιο γενικό θεώρημα:

- Ποια ιδιότητα του  $\phi$  και του  $\phi^2$  χρησιμοποιήσαμε στην παραπάνω απόδειξη;
- Μόνο ότι

$$\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$$

και ότι είναι άρρητοι.

- Η ίδια λοιπόν απόδειξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε το πιο γενικό θεώρημα:

- Ποια ιδιότητα του  $\phi$  και του  $\phi^2$  χρησιμοποιήσαμε στην παραπάνω απόδειξη;
- Μόνο ότι

$$\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$$

και ότι είναι άρρητοι.

- Η ίδια λοιπόν απόδειξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε το πιο γενικό θεώρημα:

## Θεώρημα

Έστω δυο οποιοιδήποτε άρρητοι  $\lambda$  και  $\mu$  που ικανοποιούν  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 1$ . Για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , υπάρχει ακριβώς ένας φυσικός αριθμός  $k$  τέτοιος ώστε  $n = \lfloor k\lambda \rfloor$  ή  $n = \lfloor k\mu \rfloor$ .

- Ας παρατηρήσουμε τους αριθμούς της μορφής  $n^2 - n + 41$  για  $n = 1, 2, \dots$ :

41, 43, 47, 53, 61, . . . .

- Ας παρατηρήσουμε τους αριθμούς της μορφής  $n^2 - n + 41$  για  $n = 1, 2, \dots$ :

41, 43, 47, 53, 61, . . . .

- Όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι πρώτοι.

- Ας παρατηρήσουμε τους αριθμούς της μορφής  $n^2 - n + 41$  για  $n = 1, 2, \dots$ :

41, 43, 47, 53, 61,  $\dots$

- Όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι πρώτοι.
- Υπόθεση: Για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , ο αριθμός  $n^2 - n + 41$  είναι πρώτος.



- Ας παρατηρήσουμε τους αριθμούς της μορφής  $n^2 - n + 41$  για  $n = 1, 2, \dots$ :

41, 43, 47, 53, 61,  $\dots$

- Όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι πρώτοι.
- Υπόθεση: Για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , ο αριθμός  $n^2 - n + 41$  είναι πρώτος.
- Δοκιμάζοντας πολλές τιμές για το  $n$  διαπιστώνουμε ότι η υπόθεση δεν ισχύει. Ισχύει για  $n = 1, 2, \dots, 40$ , αλλά για  $n = 41$  βλέπουμε ότι το  $41^2 - 41 + 41$  διαιρείται προφανώς από το 41.

- Μια υπόθεση που δεν μπορούμε να την καταρρίψουμε ή να την αποδείξουμε την αποκαλούμε εικασία.

- Μια υπόθεση που δεν μπορούμε να την καταρρίψουμε ή να την αποδείξουμε την αποκαλούμε εικασία.
- Οι εικασίες είναι η κινητήρια δύναμη των μαθηματικών. Προσπαθώντας να αποδείξουμε εικασίες αναγκαζόμαστε να αναλυσουμε νέες θεωρίες και τεχνικές.

- Το Θεώρημα του Fermat είναι ίσως η πιο γνώστη εικασία: Η εξίσωση  $x^n + y^n = z^n$  δεν έχει λύση για μη μηδενικούς ακέραιους  $x$ ,  $y$ , και  $z$  και για ακέραιο  $n > 2$ .

# Το Θεώρημα του Φερμά

- Το Θεώρημα του Fermat είναι ίσως η πιο γνώστη εικασία: Η εξίσωση  $x^n + y^n = z^n$  δεν έχει λύση για μη μηδενικούς ακέραιους  $x$ ,  $y$ , και  $z$  και για ακέραιο  $n > 2$ .
- Προτάθηκε από τον Pierre Fermat τον 17ο αιώνα και αποδείχτηκε από τον Andrew Wiles το 1995.

# Η εικασία του Goldbach

- Το 1742 ο Christian Goldbach διατύπωσε την εξής υπόθεση: Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα 2 πρώτων αριθμών. Π.χ.  $4 = 2 + 2$ ,  $6 = 3 + 3$ ,  $8 = 3 + 5$ .

# Η εικασία του Goldbach

- Το 1742 ο Christian Goldbach διατύπωσε την εξής υπόθεση: Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα 2 πρώτων αριθμών. Π.χ.  $4 = 2 + 2$ ,  $6 = 3 + 3$ ,  $8 = 3 + 5$ .
- Η εικασία δεν έχει αποδειχτεί ούτε καταρριφθεί.

# Η εικασία του Goldbach

- Το 1742 ο Christian Goldbach διατύπωσε την εξής υπόθεση: Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα 2 πρώτων αριθμών. Π.χ.  $4 = 2 + 2$ ,  $6 = 3 + 3$ ,  $8 = 3 + 5$ .
- Η εικασία δεν έχει αποδειχτεί ούτε καταρριφθεί.
- Έχει επιβεβαιωθεί με τη βοήθεια υπολογιστή για όλα τους αριθμούς μέχρι  $10^{14}$ .



# Η εικασία του Goldbach

- Το 1742 ο Christian Goldbach διατύπωσε την εξής υπόθεση: Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα 2 πρώτων αριθμών. Π.χ.  $4 = 2 + 2$ ,  $6 = 3 + 3$ ,  $8 = 3 + 5$ .
- Η εικασία δεν έχει αποδειχτεί ούτε καταρριφθεί.
- Έχει επιβεβαιωθεί με τη βοήθεια υπολογιστή για όλα τους αριθμούς μέχρι  $10^{14}$ .
- Προτείνω θερμά το όμορφο μυθιστόρημα του Απόστολου Δοξιάδη 'Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ'.

# Το Θεώρημα των 4 χρωμάτων

- Κάθε χάρτης μπορεί να χρωματιστεί με τέσσερα χρώματα έτσι ώστε γειτονικές χώρες να έχουν διαφορετικά χρώματα.

# Το Θεώρημα των 4 χρωμάτων

- Κάθε χάρτης μπορεί να χρωματιστεί με τέσσερα χρώματα έτσι ώστε γειτονικές χώρες να έχουν διαφορετικά χρώματα.
- Η υπόθεση αυτή προτάθηκε πριν από 130 χρόνια

# Το Θεώρημα των 4 χρωμάτων

- Κάθε χάρτης μπορεί να χρωματιστεί με τέσσερα χρώματα έτσι ώστε γειτονικές χώρες να έχουν διαφορετικά χρώματα.
- Η υπόθεση αυτή προτάθηκε πριν από 130 χρόνια
- Αποδείχτηκε τελικά το 1976 από τους Kenneth Appel και Wolfgang Haken. Η απόδειξη βασίζεται στον έλεγχο 1936 περιπτώσεων και η κάθε περίπτωση απαιτεί τον έλεγχο πολλών λογικών συνδυασμών. Μόνο με τη βοήθεια υπολογιστή μπορούν να ελεγχθούν όλες οι περιπτώσεις.

# Το Θεώρημα των 4 χρωμάτων

- Κάθε χάρτης μπορεί να χρωματιστεί με τέσσερα χρώματα έτσι ώστε γειτονικές χώρες να έχουν διαφορετικά χρώματα.
- Η υπόθεση αυτή προτάθηκε πριν από 130 χρόνια
- Αποδείχτηκε τελικά το 1976 από τους Kenneth Appel και Wolfgang Haken. Η απόδειξη βασίζεται στον έλεγχο 1936 περιπτώσεων και η κάθε περίπτωση απαιτεί τον έλεγχο πολλών λογικών συνδυασμών. Μόνο με τη βοήθεια υπολογιστή μπορούν να ελεγχθούν όλες οι περιπτώσεις.
- Παραμένει ανοικτό αν υπάρχει σύντομη απόδειξη, που δεν απαιτεί τεράστια υπολογιστική ικανότητα.

# Η εικασία του $3x + 1$

- Πάρε ένα φυσικό αριθμό  $x$ . Αν είναι άρτιος διαίρεσε τον με το 2, αλλιώς υπολόγισε το  $3x + 1$ . Επανάλαβε με το αποτέλεσμα μέχρι να προκύψει το 1.

# Η εικασία του $3x + 1$

- Πάρε ένα φυσικό αριθμό  $x$ . Αν είναι άρτιος διαίρεσε τον με το 2, αλλιώς υπολόγισε το  $3x + 1$ . Επανάλαβε με το αποτέλεσμα μέχρι να προκύψει το 1.
- $7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

# Η εικασία του $3x + 1$

- Πάρε ένα φυσικό αριθμό  $x$ . Αν είναι άρτιος διαίρεσε τον με το 2, αλλιώς υπολόγισε το  $3x + 1$ . Επανάλαβε με το αποτέλεσμα μέχρι να προκύψει το 1.
- $7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
- Εικασία: Αν ξεκινήσουμε από οποιοδήποτε φυσικό αριθμό  $x$  θα φτάσουμε πάντα στο 1.



# Η εικασία του $3x + 1$

- Πάρε ένα φυσικό αριθμό  $x$ . Αν είναι άρτιος διαίρεσε τον με το 2, αλλιώς υπολόγισε το  $3x + 1$ . Επανάλαβε με το αποτέλεσμα μέχρι να προκύψει το 1.
- $7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
- Εικασία: Αν ξεκινήσουμε από οποιοδήποτε φυσικό αριθμό  $x$  θα φτάσουμε πάντα στο 1.
- Προτάθηκε από διάφορους, γι αυτό και λέγεται επίσης το πρόβλημα του Collatz, το πρόβλημα του Ulam, ο αλγόριθμος του Hasse, κλπ.

# Η εικασία του $3x + 1$

- Πάρε ένα φυσικό αριθμό  $x$ . Αν είναι άρτιος διαίρεσε τον με το 2, αλλιώς υπολόγισε το  $3x + 1$ . Επανάλαβε με το αποτέλεσμα μέχρι να προκύψει το 1.
- $7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
- Εικασία: Αν ξεκινήσουμε από οποιοδήποτε φυσικό αριθμό  $x$  θα φτάσουμε πάντα στο 1.
- Προτάθηκε από διάφορους, γι αυτό και λέγεται επίσης το πρόβλημα του Collatz, το πρόβλημα του Ulam, ο αλγόριθμος του Hasse, κλπ.
- Παραμένει ανοικτό.

- Η συνάρτηση  $\zeta$  του Riemann ορίζεται ως εξής:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots$$

- Η συνάρτηση  $\zeta$  του Riemann ορίζεται ως εξής:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots$$

- Για  $x > 1$  το άθροισμα συγκλίνει. Η συνάρτηση μπορεί να επεκταθεί και στους μιγαδικούς αριθμούς.

- Η συνάρτηση  $\zeta$  του Riemann ορίζεται ως εξής:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots$$

- Για  $x > 1$  το άθροισμα συγκλίνει. Η συνάρτηση μπορεί να επεκταθεί και στους μιγαδικούς αριθμούς.
- Η εικασία του Riemann λέει ότι οι μόνες μη τετριμμένες ρίζες της  $\zeta$  συνάρτησης, δηλαδή οι τιμές του  $x$  που ικανοποιούν  $\zeta(x) = 0$ , είναι μιγαδικοί αριθμοί με πραγματικό μέρος ίσο με  $1/2$ .

- Η συνάρτηση  $\zeta$  του Riemann ορίζεται ως εξής:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots$$

- Για  $x > 1$  το άθροισμα συγκλίνει. Η συνάρτηση μπορεί να επεκταθεί και στους μιγαδικούς αριθμούς.
- Η εικασία του Riemann λέει ότι οι μόνες μη τετριμμένες ρίζες της  $\zeta$  συνάρτησης, δηλαδή οι τιμές του  $x$  που ικανοποιούν  $\zeta(x) = 0$ , είναι μιγαδικοί αριθμοί με πραγματικό μέρος ίσο με  $1/2$ .
- Η εικασία προτάθηκε από τον Riemann πριν από 150 χρόνια περίπου και δεν έχει ακόμα αποδειχτεί ούτε καταρριφθεί.

- Η εικασία του Riemann σχετίζεται άμεσα με την πυκνότητα των πρώτων αριθμών.

# Η εικασία του Riemann

- Η εικασία του Riemann σχετίζεται άμεσα με την πυκνότητα των πρώτων αριθμών.
- Πόσοι πρώτοι αριθμοί είναι μικρότεροι από 1000; Από  $n$ ; Ας ορίσουμε αυτόν τον αριθμό ως  $\pi(n)$ . Πόσο μεγάλο είναι το  $\pi(n)$ ;



# Η εικασία του Riemann

- Η εικασία του Riemann σχετίζεται άμεσα με την πυκνότητα των πρώτων αριθμών.
- Πόσοι πρώτοι αριθμοί είναι μικρότεροι από 1000; Από  $n$ ; Ας ορίσουμε αυτόν τον αριθμό ως  $\pi(n)$ . Πόσο μεγάλο είναι το  $\pi(n)$ ;
- Έχει αποδειχτεί ότι το  $\pi(n)$  είναι περίπου  $n/\ln n$ .

# Η εικασία του Riemann

- Η εικασία του Riemann σχετίζεται άμεσα με την πυκνότητα των πρώτων αριθμών.
- Πόσοι πρώτοι αριθμοί είναι μικρότεροι από 1000; Από  $n$ ; Ας ορίσουμε αυτόν τον αριθμό ως  $\pi(n)$ . Πόσο μεγάλο είναι το  $\pi(n)$ ;
- Έχει αποδειχτεί ότι το  $\pi(n)$  είναι περίπου  $n/\ln n$ .
- Πόσο κοντά στο  $n/\ln n$  είναι; Η εικασία του Riemann είναι ισοδύναμη με την πρόταση ότι το  $\pi(n)$  και το  $n/\ln n$  διαφέρουν κατά το πολύ  $\sqrt{n \ln n}$ .

- Η πιο σημαντική εικασία στην πληροφορική και μια από τις σημαντικότερες εικασίες γενικότερα είναι η εικασία  $P \neq NP$ .
- Η εικασία λέει ότι υπάρχουν προβλήματα που λύνονται από μη ντετερμινιστικές μηχανές Turing σε πολυωνυμικό χρόνο αλλά απαιτούν περισσότερο από πολυωνυμικό χρόνο σε ντετερμινιστικές μηχανές.
- Με πιο απλά λόγια, η εικασία λέει ότι υπάρχουν προβλήματα για τα οποία είναι αρκετά πιο δύσκολο να βρούμε τη λύση τους από το να επιβεβαιώσουμε την ορθότητά της.

- Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας απλών λογικών προτάσεων είναι γνωστό σαν SATISFIABILITY. Σ' αυτό το αλγοριθμικό πρόβλημα, δίνεται μια λογική πρόταση, για παράδειγμα,

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3),$$

και θέλουμε να βρούμε αν υπάρχουν τιμές των μεταβλητών που κάνουν την πρόταση αληθή.

- Προφανώς, αν κάποιος μας υποδείξει κατάλληλες τιμές μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε αν οι τιμές αυτές έχουν την επιθυμητή ιδιότητα. Αλλά χωρίς κάποια τέτοια υπόδειξη, πόσο δύσκολο είναι να ελέγξουμε αν υπάρχουν τέτοιες τιμές;
- Η εικασία  $P=NP$  λέει ότι χωρίς υπόδειξη, το πρόβλημα είναι δύσκολο, και πιο συγκεκριμένα, ότι δεν μπορεί να λυθεί πάντα σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το μήκος της πρότασης.

- Αν και τέτοια θέματα φαίνονται να μην έχουν εφαρμογές, πολλές φορές η ανάπτυξη της τεχνολογίας μεταφέρει τέτοια 'θεωρητικά' θέματα στο πεδίο των εφαρμογών.

- Αν και τέτοια θέματα φαίνονται να μην έχουν εφαρμογές, πολλές φορές η ανάπτυξη της τεχνολογίας μεταφέρει τέτοια 'θεωρητικά' θέματα στο πεδίο των εφαρμογών.
- Για παράδειγμα, η εικασία του Riemann έχει άμεση σχέση με την κρυπτογραφία.