Μαθηματικά Πληροφορικής — Εξέταση 2011.02.08

ΟΔΗΓΙΕΣ: ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ

- Γράψτε το όνομά σας, τον ΑΜ και το **email** σας πάνω σε όλες τις κόλλες.
- Γράψτε πάνω στα θέματα το όνομά σας. Πρέπει να τα επιστρέψετε με όλες τις κόλλες (και το πρόχειρο). Τα θέματα θα αναρτηθούν στη σελίδα του μαθήματος.
- Δεν επιτρέπονται **κινητά**, σημειώσεις, βιβλία.
- Αντιγραφή επιφέρει μηδενισμό σε **όλους** τους συμμετέχοντες για φέτος (για όλες τις εξεταστικές).
- Μπορείτε να βάλετε **ρήτρα** σημειώνοντας στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας αν επιθυμείτε να μην περαστεί η βαθμολογία σας όταν είναι κάτω από κάποιο ελάχιστο όριο. **Δεν μπορείτε να βάλετε ρήτρα μετά την εξέταση.**
- Δεν επιτρέπεται η έξοδος στα **πρώτα 75΄** της εξέτασης.
- Λύστε και τα 4 θέματα. Οι απαντήσεις σας να είναι **σαφείς και σύντομες**.

ΘΕΜΑΤΑ

Διμερείς γράφοι. Έστω γράφος G με ακμές:

$$(1,5),(1,7),(2,7),(2,8),(3,5),(3,6),(3,7),(4,7),(4,8).$$

(α) Υπάρχει κύκλος/μονοπάτι Euler/Hamilton; Για καθεμιά από τις 4 απαντήσεις, σχεδιάστε τον κύκλο/μονοπάτι ή δικαιολογήστε τυχόν αρνητική απάντηση.
(β) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο «ξετυλίγματος» για να επεκτείνετε το μερικό ταίριασμα $\{(1,7),(2,8),(3,5)\}$.
(γ) Χρησιμοποιήστε τον πίνακα 4×4 που ανάγει τον έλεγχο ύπαρξης τέλειου ταιριάσματος στον υπολογισμό ορίζουσας, για να βρείτε όλα τα τέλεια ταιριάσματα στον G. ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) Μονο μονοπάτι Euler / Hamilton. (β) $\{(1,5),(2,7/8),(3,6),(4,8/7)\}$. (γ) $\det M = x_{36}x_{15}(x_{27}x_{48}-x_{28}x_{47}) \Rightarrow 2$ Τέλεια ταιριασματα. $\boxed{\text{ΟΕΔ}}$

Αλγεβρικοί αλγόριθμοι.
(α) Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση Διαίρει και Βασίλευε (Karatsuba) για να διατυπώσετε αλγόριθμο για τον πολλαπλασιασμό δύο πολυωνύμων βαθμού n σε μία μεταβλητή. Αποδείξτε την ασυμπτωτική του πολυπλοκότητα.
(β) Έστω πίνακας 4×4:

$$M=\begin{bmatrix} -10 & -19 & -30 & 11 \\ 10 & 20 & 30 & -10 \\ 100 & -202 & -300 & 99 \\ 100 & m & 301 & -100 \end{bmatrix},$$

όπου m ο Αριθμός Μητρώου σας mod 1000. Δεδομένου πως $0 \le |M| < 15$, υπολογίστε την ορίζουσα $|M|$ με χρήση Κινέζικου θεωρήματος, μέσω του υπολογισμού των τιμών: $|M| \bmod p$, για δυο διαφορετικούς πρώτους p.
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) $O(n^{\lg 3})$. (β) $\det M = 10$. $\boxed{\text{ΟΕΔ}}$

Επαγωγή. Αποδείξτε πως για $n \ge 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k-1} \le \frac{2n-1}{n}$$

Προσοχή: Η προφανής επαγωγή δεν δουλεύει. ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η προφανής επαγωγή πράγματι δεν δουλεύει γιατί αν προσθέσουμε τον $(n+1)$ όρο και στα 2 μέλη θα έχουμε

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k-1} \le \frac{2n-1}{n} \quad \Leftrightarrow$$
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2-k-1} \le \frac{2n-1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2-(n+1)-1}.$$

Αλλά όπως προκύπτει μετά από πράξεις, το τελευταίο δεν είναι μικρότερο ή ίσο του $\frac{2(n+1)-1}{n+1}$.

Για να δουλέψει η επαγωγή, ισχυροποιούμε την επαγωγική υπόθεση: αντικαθιστούμε το $\frac{2n-1}{n}$ του δεξιού μέλους με κάτι μικρότερο και πιο συγκεκριμένα με $\frac{2n-1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{2n-2}{n}$ και δείχνουμε την ισχυρότερη πρόταση

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k-1} \le \frac{2n-2}{n}$$

Η επαγωγή τώρα είναι προφανής (δοκιμάστε τη). Ευτυχώς με την ισχυροποίηση η βάση $n=2$ της επαγωγής συνεχίζει να ισχύει.
$\boxed{\text{ΟΕΔ}}$

Αναδρομικός ορισμός. Θεωρήστε το σύνολο L που ορίζεται με τον εξής αναδρομικό ορισμό:

- $(1,1) \in L$
- Αν $(a,b) \in L$, τότε $(2a+b, a+b) \in L$
- Αν $(a,b) \in L$ και $a \geq b$, τότε $(b, a-b) \in L$

1. Ποιο σύνολο είναι το L; Περιγράψτε το με μια πρόταση της καθομιλουμένης και δώστε επίσης μια ακριβή μαθηματική περιγραφή συμπληρώνοντας τις ... στην παρακάτω περιγραφή:

$$L = \{(a,b) : \text{ οι } a \text{ και } b \text{ είναι } \ldots\}$$

2. Αποδείξτε προσεκτικά ότι η μαθηματική περιγραφή που δώσατε εκφράζει το σύνολο L.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θυμηθείτε πως $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ είναι οι αριθμοί Fibonacci.

$$L = \{(a,b) : \text{ οι } a \text{ και } b \text{ είναι διαδοχικοί αριθμοί Fibonacci με } a \geq b\}$$

Η δομική επαγωγή είναι προφανής:

- το ζεύγος $(1,1)$ έχει την ιδιότητα
- αν $(a,b) = (F_{k+1}, F_k)$ για κάποιο k, τότε $(2a+b, a+b) = (F_{k+3}, F_{k+2})$
- αν $(a,b) = (F_{k+1}, F_k)$ για κάποιο k, τότε $(b, a-b) = (F_k, F_{k-1})$

Κάθε ζεύγος διαδοχικών αριθμών Fibonacci παράγεται με τους κανόνες ως εξής: αρχίζοντας με τον πρώτο κανόνα $(F_2, F_1) = (1,1)$· με k διαδοχικές εφαρμογές του δεύτερου κανόνα παράγουμε το ζεύγος (F_{2k+2}, F_{2k+1})· αν χρειαστεί, με μια μόνη εφαρμογή του τρίτου κανόνα παράγουμε το προηγούμενο ζεύγος (F_{2k+1}, F_{2k}).

Σημείωση: Αν αντικαταστασήσουμε το $a \geq b$ με $a > b$ στον 3ο κανόνα, τότε παίρνουμε πάλι το ίδιο σύνολο αλλά χωρίς το ζεύγος $(1,0)$. $\boxed{\text{ΟΕΔ}}$