ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ και ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙ΄ΩΝ

Λύσεις εξέτασης 29 Αυγούστου 2006

ΜΈΡΟΣ Α΄: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΉΣ

Διδάσκων: Η. Κουτσουπιάς

1. [40%] Είναι τα παρακάτω σύνολα αριθμήσιμα ή όχι; Αποδείξτε προσεκτικά τις απαντήσεις σας.

1. $I = \{f : f$ είναι αύξουσα συνάρτηση από το $\mathbb{Z}_0^+$ στο $\mathbb{Z}_0^+\}$
   Παράδειγμα: Η συνάρτηση
   $$f(n) = \begin{cases} n & \text{αν } n \text{ είναι περιττός} \\ n+1 & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$$
   ανήκει στο I.
2. **[Προαιρετική, +40%]**
   $D = \{f : f$ είναι φθίνουσα συνάρτηση από το $\mathbb{Z}_0^+$ στο $\mathbb{Z}_0^+\}$
   Παράδειγμα: Η συνάρτηση
   $$f(n) = \left\lceil \frac{10}{n+1} \right\rceil$$
   ανήκει στο D.

Απάντηση. Θα δείξουμε με τη μέθοδο της Διαγωνίου ότι το σύνολο I δεν είναι αριθμήσιμο. Έστω ότι ήταν αριθμήσιμο. Τότε θα μπορούσαμε να βάλουμε στη σειρά τις αύξουσες συναρτήσεις από το $\mathbb{Z}_0^+$ στο $\mathbb{Z}_0^+$. Έστω $f_1, f_2, \ldots$ αυτή η σειρά. Θα κατασκευάσουμε τώρα μια αύξουσα συνάρτηση από το $\mathbb{Z}_0^+$ στο $\mathbb{Z}_0^+$ που διαφέρει από κάθε συνάρτηση f_i στην i-οστή τιμή, δηλαδή $f(i) \neq f_i(i)$. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η

$$f(i) = \begin{cases} i & \text{αν } f_i(i) \neq i \\ i+1 & \text{αν } f_i(i) = i \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι για κάθε i, $f(i) \neq f_i(i)$, αλλά είναι η συνάρτηση f αύξουσα; Ναι, γιατί από τον ορισμό της $i \leq f(i) \leq i+1$. Η σχέση αυτή για $i+1$ είναι $i+1 \leq f(i+1) \leq i+2$ και επομένως $f(i) \leq i+1 \leq f(i+1)$.

Μια άλλη λύση, δηλαδή μια διαφορετική f, είναι η εξής:

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1 + f_1(1) \\
f(2) &= 1 + f_1(1) + f_2(2) \\
&\vdots \\
f(i) &= 1 + f_1(1) + \cdots + f_i(i) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ένα λάθος σε πολλές απαντήσεις ήταν πως πήραν το παράδειγμα της εκφώνησης και προσπάθησαν να δείξουν πως το πεδίο τιμών της συγκεκριμμένης συνάρτησης είναι ή δεν αριθμήσιμο.

Για την προαιρετική άσκηση: Το σύνολο D είναι αριθμήσιμο! Θα δείξουμε πως μπορούμε να βάλουμε στη σειρά τις φθίνουσες συναρτήσεις από το $\mathbb{Z}_0^+$ στο $\mathbb{Z}_0^+$. Η βασική διαφορά με το σύνολο I, που δεν είναι αριθμήσιμο, είναι πως μια φθίνουσα συνάρτηση γίνεται σταθερή από κάποιο σημείο και πέρα. Οι τιμές της δεν μπορεί να μικραίνουν συνεχώς αφού πρέπει να είναι θετικοί ακέραιοι. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε φθίνουσα συνάρτηση f του συνόλου D, υπάρχει κάποιος θετικός ακέραιος, που θα τον συμβολίσουμε με m_f, τέτοιος ώστε $f(i) = f(m_f)$ για κάθε $i \geq m_f$.

Αν μας δοθεί η αρχική τιμή $f(0)$ και η τιμή m_f πέρα από την οποία η συνάρτηση είναι σταθερή, υπάρχει πεπερασμένος αριθμός διαφορετικών τέτοιων συναρτήσεων του D. Μια τέτοια συνάρτηση χαρακτηρίζεται από τις τιμές $f(0), f(1), \ldots, f(m_f)$ και όλες αυτές οι τιμές είναι στο διάστημα $\{0, 1, \ldots, f(0)\}$. Δηλαδή υπάρχουν το πολύ $f(0)^{m_f}$ διαφορετικές συναρτήσεις του D με αρχική τιμή $f(0)$ και σταθερές μετά από το σημείο m_f.

Μπορούμε τώρα να βαλουμε τις φθίνουσες συναρτήσεις στη σειρά. Επειδή υπάρχουν δυο παράμετροι, οι $f(0)$ και m_f, κάνουμε το ίδιο κόλπο όπως και με τους ρητούς αριθμούς και θεωρούμε το αθροισμά τους: Πρώτα βάζουμε όλες τις συναρτήσεις f με $f(0)+m_f = 0$ (με οποιαδήποτε, π.χ. λεξικογραφική, σειρά), μετά τις συναρτήσεις με $f(0) + m_f = 1$, μετά τις συναρτήσεις με $f(0) + m_f = 2$, κοκ. Επειδή κάθε τέτοια ομάδα περιέχει πεπερασμένο αριθμό συναρτήσεων, και επειδή κάθε συνάρτηση f του D ανήκει σε μια τέτοια ομάδα, η f θα εμφανιστεί στην ακολουθία μετά από πεπερασμένο αριθμό συναρτήσεων.

2. [40%] Ορίζουμε αναδρομικά ένα σύνολο συμβολοσειρών P του αλφαβήτου $\{0, 1\}$ ως εξής :

1. Η κενή συμβολοσειρά ανήκει στο P: $\epsilon \in P$
2. Αν μια συμβολοσειρά w ανήκει στο σύνολο P, τότε και οι συμβολοσειρές $0w0$ και $1w1$ ανήκουν στο P.

Ποιό είναι το σύνολο P; Αποδείξτε προσεκτικά την απάντησή σας.

Απάντηση. Το σύνολο $P = \{\epsilon, 00, 11, 0000, 0110, 1001, 1111, 000000, \ldots\}$ είναι το σύνολο των συμβολοσειρών του αλφαβήτου $\{0, 1\}$ με άρτιο μήκος που είναι παλίνδρομες, δηλαδή παραμένουν ίδιες αν διαβαστούν από δεξιά προς τα αριστερά.

Έστω S το σύνολο των άρτιων παλίνδρομων του αλφαβήτου $\{0, 1\}$. Θα δείξουμε ότι $P = S$.

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{S}$**:** Θα δείξουμε δηλαδή πώς κάθε συμβολοσειρά που παράγεται με τους κανόνες είναι άρτιο παλίνδρομο. Με δομική επαγωγή:

Βάση της επαγωγής: Η κενή συμβολοσειρά έχει άρτιο μήκος (0) και διαβάζεται το ίδιο από δεξιά προς αριστερά.

Επαγωγικό βήμα: Αν w είναι άρτιο παλίνδρομο, τότε είναι σαφές και πως η $0w0$ είναι επίσης άρτιο παλίνδρομο. Το ίδιο και η $1w1$.

$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{P}$**:** Θα δείξουμε δηλαδή πώς κάθε άρτιο παλίνδρομο παράγεται από του κανόνες. Με επαγωγή στο μήκος του.

Βάση της επαγωγής: Υπάρχει ένα μόνο παλίνδρομο μήκους 0, η κενή συμβολοσειρά ϵ η οποία παράγεται από τον πρώτο κανόνα.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι κάθε παλίνδρομο μήκους $2k$ παράγεται από τους κανόνες. Θα δείξουμε πως κάθε παλίνδρομο μήκους $2(k + 1)$ παράγεται από τους κανόνες. Πράγματι, έστω v ένα παλίνδρομο μήκους $2(k + 1)$. Αν το πρώτο σύμβολο του v είναι 0, τότε αφού πρόκειται για παλίνδρομο, και το τελευταίο σύμβολό του θα είναι 0. Επιπλέον τα υπόλοιπα σύμβολα θα σχηματίζουν παλίνδρομο. Άρα η v είναι της μορφής $0w0$, όπου w είναι παλίνδρομο και έχει μήκος $2k$. Από την επαγωγική υπόθεση, το w μπορεί να παραχθεί από τους κανόνες. Αλλά τότε με μια ακόμα εφαρμογή του δεύτερου κανόνα μπορούμε να παράγουμε το v. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αντιμετωπίζουμε και την περίπτωση που το v ξεκινά με 1.

3. [20%] Έστω ότι διαλέγουμε 101 τυχαίους αριθμούς στο διάστημα $[0, 1)$. Δείξτε ότι υπάρχουν δυο αριθμοί που διαφέρουν κατά το πολύ $1/100$.

Απάντηση. Με την Αρχή του Περιστερώνα. Ας πάρουμε το διαστημα $[0, 1)$ και ας το χωρίσουμε σε εκατό ίσα διαστήματα:

$$[0, 1/100), [1/100, 2/100), \ldots, [99/100, 1).$$

Σύμφωνα με την Άρχή του Περιστερώνα, αν ρίξουμε 101 αριθμούς (περιστέρια) στα 100 αυτά διαστήματα (φωλιές), κάποιο διάστημα θα περιέχει δυο τουλάχιστον αριθμούς. Οι αριθμοί αυτοί διαφέρουν κατά το πολύ $1/100$ (όσο είναι το μήκος του διαστήματος).

Σημείωση: το γεγονός πως οι αριθμοί είναι τυχαίοι δεν παίζει κανένα ρόλο. Οποιοδήποτε σύνολο 101 αριθμών στο διάστημα $[0, 1)$ έχει την ιδιότητα.