ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ και ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΏΝ
ΜΕΡΟΣ Α΄: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Διδάσκων: Η.Κουτσουπιάς
Λύσεις εξέτασης 16 Ιουνίου 2005

Πρόβλημα 1. Έστω F το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών και με πεδίο τιμών επίσης το σύνολο των φυσικών αριθμών. Δείξτε ότι το σύνολο F δεν είναι αριθμήσιμο.
Λύση. Με χρήση της μεθόδου της Διαγωνίου. Έστω ότι το σύνολο F είναι αριθμήσιμο. Τότε μπορούμε να βάλουμε τα στοιχεία του σε σειρά f_1, f_2, ... έτσι ώστε όλα τα στοιχεία του να εμφανίζονται στην ακολουθία αυτή. Το κάθε στοιχείο f_i είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το σύνολο των φυσικών αριθμών. Θα κατασκευάσουμε τώρα ένα στοιχείο f του συνόλου F που διαφέρει από τα $f_1, f_2, \ldots$:

$$f(n) = f_n(n) + 1$$

Η συνάρτηση f διαφέρει από την f_1 στην τιμή $f(1)$, από την f_2 στην τιμή $f(2)$ κοκ. Η f είναι συνάρτηση από τους φυσικούς στους φυσικούς, είναι δηλαδή στοιχείο του F, και διαφέρει από κάθε όρο της ακολουθίας $f_1, f_2, \ldots$. Άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι όλα τα στοιχεία του F εμφανίζονται στην ακολουθία.
Πρόβλημα 2. Θεωρήστε το σύνολο A των συμβολοσειρών του αλφαβήτου $\{0, 1\}$ που ορίζεται με τον εξής αναδρομικό ορισμό:

- $01 \in A$.
- Αν $w \in A$, τότε $w1w \in A$.

1. Ποιό σύνολο είναι το A; Περιγράψτε το με μια πρόταση της καθομιλουμένης.
2. Δώστε επίσης μια ακριβή μαθηματική περιγραφή.
3. Αποδείξτε προσεκτικά ότι η μαθηματική περιγραφή που δώσατε εκφράζει το σύνολο A.

Λύση. Οι συμβολοσειρές του συνόλου A αποτελούνται από 2^n διαδοχικά 011 από τις οποίες έχουμε αφαιρέσει το τελευταίο 1. Ισοδύναμα, κάθε συμβολοσειρά περιέχει $2^n - 1$ διαδοχικά 011 ακολουθούμενα από ένα 01. Πιο συγκεκριμένα, αν $(011)^k$ συμβολίζει τη συμβολοσειρά αποτελούμενη από την παράθεση k αντιγράφων του 011, τότε

$$A = \{(011)^{2^n-1}01 \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι αυτό είναι πράγματι το σύνολο A. Για να το δείξουμε αυτό πρέπει να δείξουμε δυο προτάσεις: Πρώτα ότι κάθε συμβολοσειρά που ανήκει στο A, δηλαδή κάθε συμβολοσειρά που παράγεται με τους παραπάνω κανόνες, έχει τη μορφή $(011)^{2^n-1}01$ για κάποιον φυσικό αριθμό n. Και το αντίστροφο, ότι δηλαδή κάθε συμβολοσειρά που είναι της μορφής $(011)^{2^n-1}01$ μπορεί να παραχθεί με τους παραπάνω κανόνες.

Για το πρώτο θα χρησιμοποιήσουμε δομική επαγωγή και για το δεύτερο μαθηματική επαγωγή στο n.

Πρόταση 1. *Κάθε στοιχείο του συνόλου A είναι της μορφής $(011)^{2^n-1}01$ για κάποιο φυσικό αριθμό n.*

Απόδειξη. Με δομική επαγωγή.

Βάση δομικής επαγωγής: Το 01 είναι της μορφής $(011)^{2^n-1}01$ γιατί για $n=0$: $(011)^{2^n-1}01 = (011)^0 01 = 01$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω $w \in A$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει n τέτοιο ώστε $w = (011)^{2^n-1}01$. Θα δείξουμε ότι το $w1w$ είναι της ίδιας μορφής. Πράγματι

$$w1w = (011)^{2^n-1}01\,1\,(011)^{2^n-1}01 = (011)^{2^n-1+1+2^n-1} = (011)^{2^{n+1}-1}01$$

είναι της ίδιας μορφής. □

Πρόταση 2. *Κάθε συμβολοσειρά της μορφής $(011)^{2^n-1}01$, όπου n φυσικός αριθμός, παράγεται με τους κανόνες που ορίζουν το σύνολο A.*

Απόδειξη. Με μαθηματική επαγωγή στο n.

Βάση της επαγωγής: Αν $n = 0$, τότε η συμβολοσειρά $(011)^{2^n-1}01 = (011)^0 01 = 01$ ανήκει στο σύνολο A, σύμφωνα με τον πρώτο κανόνα.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι η πρόταση είναι αληθής για κάποιο n, δηλαδή $(011)^{2^n-1}01 \in A$. Θα δείξουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για $n+1$, δηλαδή ότι το $(011)^{2^{n+1}-1}01$ μπορεί να παραχθεί με τους παραπάνω κανόνες. Πράγματι, αν θέσουμε $w = (011)^{2^n-1}01$, τότε σύμφωνα με τον δεύτερο κανόνα, το $w1w$ ανήκει στο A και είναι ίσο με $w1w = (011)^{2^{n+1}-1}01$. □

Πρόβλημα 3. Έστω ότι ρίχνουμε b μπαλάκια σε n δοχεία. Το κάθε μπαλάκι ρίχνεται με ομοιόμορφη κατανομή στα δοχεία και ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα μπαλάκια. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι κανένα δοχείο δεν περιέχει δυο ή περισσότερα μπαλάκια όταν

1. $b = 2$
2. $b = n$.

3. $b = n + 1$.

Λύση. Υπάρχουν n^b διαφορετικοί τρόποι να τοποθετήσουμε b (αριθμημένα) μπαλάκια σε n δοχεία (το πρώτο μπαλάκι μπορεί να πάει σε n δοχεία, το δεύτερο σε n δοχεία κοκ). Από αυτούς τους τρόπους, οι $n(n-1)\cdots(n-b+1)$ έχουν το κάθε μπαλάκι σε διαφορετικό δοχείο (το πρώτο μπαλάκι μπορεί να πάει σε n δοχεία, το δεύτερο σε $n-1$ δοχεία γιατί το ένα είναι ήδη κατειλημμένο, κοκ· το b-οστό μπαλάκι μπορεί να πάει σε $n-(b-1) = n-b+1$ δοχεία γιατί $b-1$ δοχεία είναι ήδη κατειλημμένα). Άρα η πιθανότητα τα b μπαλάκια να καταλήξουν σε διαφορετικά δοχεία είναι

$$p_b = \frac{n(n-1)\cdots(n-b+1)}{n^b}$$

1. Για $b = 2$ η πιθανότητα αυτή είναι $p_2 = \frac{n(n-1)}{n^2} = (n-1)/n$.
2. Για $b = n$ η πιθανότητα είναι $p_n = n!/n^n$.
3. Για $b = n+1$ η πιθανότητα είναι $p_{n+1} = 0$, αφού ο τελευταίος πολλαπλασιαστής του αριθμητή είναι $n-b+1 = 0$. Το τελευταίο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα και από την Αρχή του Περιστερώνα: Δεν μπορούμε να βάλουμε $n+1$ μπαλάκια σε n δοχεία χωρίς κάποιο δοχείο να περιέχει τουλάχιστον 2 μπαλάκια.