Μαθηματικά Πληροφορικής
Εξέταση 2007.09.05
Σύντομες απαντήσεις

ΟΔΗΓΙΕΣ: ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ

- Λύστε και τα 4 θέματα. Οι απαντήσεις σας να είναι σαφείς και σύντομες. Μακροσκελείς απαντήσεις κινδυνεύουν να πάρουν μικρό βαθμό.
- Γράψτε πάνω στα θέματα το όνομά σας. Πρέπει να τα επιστρέψετε με όλες τις κόλλες (και το πρόχειρο). Τα θέματα θα αναρτηθούν στη σελίδα του μαθήματος.
- Δεν επιτρέπονται κινητά, σημειώσεις, βιβλία, αριθμομηχανές, κλπ.
- Αντιγραφή συνεπάγεται μηδενισμό για **όλους** τους συμμετέχοντες για φέτος (για όλες τις εξεταστικές).
- Μπορείτε να σημειώσετε πάνω στο γραπτό σας αν επιθυμείτε να μην περαστεί η βαθμολογία σας όταν είναι κάτω από κάποιο ελάχιστο.
- Δεν επιτρέπεται η έξοδος στη διάρκεια της 1η ώρας της εξέτασης.

ΘΕΜΑΤΑ

1ο Θέμα. Αποδείξτε προσεκτικά πως σε κάθε αύξουσα ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_n$ με $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, υπάρχει κάποιο k τέτοιο ώστε $a_k = k$.

Για παράδειγμα, στην ακολουθία $2, 3, 3, 5, 6, 6, 6$, έχουμε $a_3 = 3$ (επίσης $a_6 = 6$).

Απάντηση. Με επαγωγή στο n. Η βάση για $n = 1$ είναι προφανής, γιατί $a_1 = 1$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για n. Θα τη δείξουμε για $n + 1$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- Αν $a_{n+1} = n + 1$, τότε η πρόταση ισχύει για $k = n + 1$.
- Διαφορετικά, $a_{n+1} \le n$. Επομένως $a_n \le n$ και η πρόταση ισχύει για τα στοιχεία $a_1, a_2, \ldots, a_n$ από την επαγωγική υπόθεση.

2ο Θέμα. Είναι τα παρακάτω σύνολα αριθμήσιμα ή όχι; Αποδείξτε την απάντησή σας.

1. Το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού τους φυσικούς $\mathbf{N}$ και πεδίο τιμών το $\{0, 1\}$.
2. Το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\{0, 1\}$ και πεδίο τιμών τους φυσικούς $\mathbf{N}$.

Απάντηση.

1. Μη αριθμήσιμο. Μια συνάρτηση f από το $\mathbf{N}$ στο $\{0, 1\}$ καθορίζεται από το υποσύνολο των φυσικών με εικόνα το 1, δηλαδή από το $\{k : f(k) = 1\}$. Από αυτό παρατηρούμε πως το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού τους φυσικούς $\mathbf{N}$ και πεδίο τιμών το $\{0, 1\}$ είναι ισοδύναμο με το σύνολο των υποσυνόλων των φυσικών αριθμών. Το τελευταίο όμως είναι γνωστό πως δεν είναι αριθμήσιμο.

   Εναλλακτική λύση με τη μέθοδο της διαγωνίου: Έστω ότι ήταν αριθμήσιμο και έστω $f_1, f_2, \ldots$ μια απαρίθμηση των συναρτήσεων. Τότε η συνάρτηση g με $g(n) = 1 - f_n(n)$ διαφέρει από ολες τις συναρτήσεις και ανήκει στο σύνολο των συναρτήσεων, άτοπο.

2. Αριθμήσιμο. Το σύνολο των συναρτήσεων αυτό είναι ισοδύναμο με το σύνολο των ζευγών $\{f(0), f(1)\}$ των φυσικών αριθμών, που είναι γνωστό πως είναι αριθμήσιμο.

   Εναλλακτική λύση: Μπορούμε να βάλουμε τις συναρτήσεις αυτές στη σειρά. Πρώτα τις συναρτήσεις f με $f(0) + f(1) = 0$, μετά τις συναρτήσεις με $f(0) + f(1) = 1$, μετά τις συναρτήσεις με $f(0) + f(1) = 2$ κοκ.

3ο Θέμα. Θεωρήστε το σύνολο A των συμβολοσειρών του αλφαβήτου $\{0,1\}$ που ορίζεται με τον εξής αναδρομικό ορισμό:

- $1 \in A$.
- Αν $w \in A$, τότε $w0w \in A$.

1. Ποιό σύνολο είναι το A; Περιγράψτε το με μια πρόταση της καθομιλουμένης.
2. Δώστε επίσης μια ακριβή μαθηματική περιγραφή.
3. Αποδείξτε προσεκτικά ότι η μαθηματική περιγραφή που δώσατε εκφράζει το σύνολο A.

Απάντηση. Το σύνολο $A = \{1, 101, 1010101, 101010101010101, \ldots\}$ αποτελείται από τις συμβολοσειρές με εναλλασσόμενα 0 και 1 που αρχίζουν με 1 και έχουν μήκος κάποια ακέραια δύναμη του 2 μείον 1. Δηλαδή είναι ίσο με το σύνολο

$$B = \{1(01)^{2^n-1} \,:\, n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Πρέπει να αποδείξουμε πως $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Η λύση, που παραλείπεται, είναι παρόμοια με τις λύσεις των σημειώσεων.

4ο Θέμα. Έστω ότι έχουμε ένα πιθανοτικό αλγόριθμο A που για κάθε είσοδο x δίνει τη σωστή απάντηση ('ναι' ή 'όχι') με πιθανότητα τουλάχιστον 2/3:

Πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο A ώστε να κατασκευάσουμε ένα αλγόριθμο που δίνει την σωστή απάντηση με πιθανότητα τουλάχιστον 3/4;

Απάντηση. Τρέχουμε τον αλγόριθμο A 5 φορές και επιστρέφουμε την απάντηση που πλειοψηφεί. Λόγω συμμετρίας αρκεί να επικεντρωθούμε στην περίπτωση που η σωστή απάντηση είναι 'ναι'. Ας συμβολίζουμε το 'ναι' με 1 και το 'όχι' με 0. Αφού τρέχουμε τον αλγόριθμο 5 φορές, υπάρχουν $2^5 = 32$ πιθανές απαντήσεις. Από αυτές οι σωστές είναι αυτές που έχουν 3 τουλάχιστον 1. Υπάρχουν 3 περιπτώσεις:

- Οι απαντήσεις είναι 11111, δηλαδή όλες 'ναι'. Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα $(2/3)^5$.
- Οι απαντήσεις είναι 11110, 11101, …01111 (υπάρχουν 5 τέτοιες περιπτώσεις). Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα $5(2/3)^4(1/3)$.
- Οι απαντήσεις είναι 11100, 11010, …00111 (υπάρχουν 10 τέτοιες περιπτώσεις). Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα $10(2/3)^3(1/3)^2$.

Παρατηρούμε πως $(2/3)^5 + 5(2/3)^4(1/3) + 10(2/3)^3(1/3)^2 > 4/3$.

Αξίζει να τονιστεί πως αν τρέχουμε τον αλγόριθμο 3 φορές η πιθανότητα επιτυχίας (με ανάλογους υπολογισμούς) είναι μικρότερη από 3/4. Δεν έχει νόημα να τρέξουμε τον αλγόριμο 4 φορές ή οποιδήποτε άρτιο αριθμό φορών.