Μαθηματικά Πληροφορικής 2011-2012

3ο Σύνολο Ασκήσεων

Λύσεις

Πρόβλημα 1 *(Μπάλες σε δωμάτιο).* Προς απαγωγή σε άτοπο, ας υποθέσουμε πως όλες οι μπάλες αγγίζουν στο πάτωμα. Τότε, εάν r είναι η ακτίνα της κάθε μπάλας, είναι εύκολο να δούμε πως κάθε μπάλα καταλαμβάνει πr^2 εμβαδού από το πάτωμα (προβολή της στο πάτωμα), και πως αυτό το εμβαδό κάθε μπάλας δεν επικαλύπτεται με καμίας άλλης. Συνεπώς, αθροιστικά οι μπάλες καταλαμβάνουν $400\pi r^2 = 400\pi(0.1)^2 = 4\pi\ \mathrm{m}^2$ εμβαδού, που είναι άτοπο αφού το συνολικό εμβαδό του πατώματος είναι $3 \cdot 4 = 12 < 4\pi$.

Πρόβλημα 2 *(Υποσύνολα με ίσα αθροίσματα).* Έστω A ένα τυχαίο τέτοιο σύνολο δέκα διψήφιων φυσικών αριθμών. Για το τυχαίο υποσύνολό του $B \subseteq A$ θα συμβολίζουμε με $S(B)$ το άθροισμα των στοιχείων του, δηλαδή $S(B) = \sum_{n\in B} n$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι αφού $|B| \leq 10$ και $0 < n \leq 99$ για κάθε $n \in B$, πρέπει να ισχύει

$$0 < S(B) \leq 10 \cdot 99 = 990,$$

που σημαίνει πως τα υποσύνολα του A μπορούν να έχουν 990 το πολύ διαφορετικά αθροίσματα στοιχείων (δηλαδή $\left|\{S(B) : B \subseteq A\}\right| \leq 990$). Όμως, αφού $|A| = 10$ υπάρχουν 2^{10} τέτοια διαφορετικά υποσύνολα B, και συνεπώς από την αρχή του περιστερώνα (αφού $2^{10} > 990$), πράγματι πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο με το ίδιο άθροισμα $S(B)$.

Πρόβλημα 3 *(Πράξεις αριθμήσιμων συνόλων).* Αρχικά, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε πως $A, B \neq \emptyset$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε ότι $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = A$ ή $A \cup B = B$, και $A \times B = \emptyset$, των οποίων η αριθμησιμότητα έπεται με τετριμμένο τρόπο. Οπότε, αφού τα A, B είναι μη κενά και αριθμήσιμα, ισοδύναμα υπάρχουν ακολουθίες a, b τέτοιες ώστε $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = A$, και $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = B$.

1. Προφανώς $A \cap B \subseteq A$, και άρα είναι αριθμήσιμο σύνολο ως υποσύνολο του αριθμήσιμου συνόλου A.

2. Ορίζουμε μία ακολουθία c_n ως εξής:

$$c_n = \begin{cases} a_k, & \text{αν } n = 2k-1, \\ b_n, & \text{αν } n = 2k. \end{cases}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η ακολουθία αυτή είναι καλώς ορισμένη (για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει *μοναδικός* $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n = 2k-1$ ή $n = 2k$) και πως $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} = A \cup B$.

2. Ορίζουμε μία ακολουθία d_n ως εξής:

$$d_n = \begin{cases} (a_{k_1}, b_{k_2}), & \text{αν } n = 2^{k_1}3^{k_2}, \\ (a_1, b_1), & \text{αν δεν υπάρχουν τέτοια } k_1, k_2. \end{cases}$$

Η ακολουθία d_n είναι καλώς ορισμένη γιατί, από την ανάλυση ακεραίων σε πρώτους παράγοντες, ξέρουμε πως αν υπάρχουν ακέραιοι k_1, k_2 τέτοιοι ώστε $n = 2^{k_1}3^{k_2}$ τότε αυτοί είναι μοναδικοί. Τέλος, εύκολα βλέπουμε πως $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} = A \times B$.

Πρόβλημα 4 *(Αριθμήσιμα σύνολα ή όχι)*.

1. Το σύνολο αυτό *δεν* είναι αριθμήσιμο: Το σύνολό μας είναι ισοπληθικό[1] με το σύνολο των υποσυνόλων των φυσικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του 100, δηλαδή είναι το δυναμοσύνολο[2] ενός άπειρου αριθμήσιμου συνόλου, και άρα δεν είναι αριθμήσιμο (όπως μπορεί να δειχθεί με ένα κλασικό επιχείρημα της μεθόδου της διαγωνίου, όπου οι γραμμές του πίνακα είναι οι ακολουθίες που απαριθμούν τα υποσύνολα φυσικών μεγαλύτερων του 100).

2. Το σύνολο αυτό είναι *πεπερασμένο*, και άρα είναι και αριθμήσιμο: Πράγματι, έστω A το σύνολό μας. Τότε

$$A \subseteq \{S \subseteq \mathbb{N} : S \subseteq [1, 99]\} \cup \{100\}$$

και άρα $|A| = 2^{99}$ (το σύνολό μας είναι ισοπληθικό με το δυναμοσύνολο των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι του 100).

3. Το σύνολό μας είναι το

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{n\} \cup \{S \subseteq \mathbb{N} : S \subseteq [n+1, n+99]\} \cup \{n+100\})$$

και άρα είναι η ένωση αριθμήσιμου πλήθους πεπερασμένων συνόλων (κάθε ένα από τα οποία έχει πληθάριθμο[3] $1+2^{99}+1$), οπότε είναι αριθμήσιμο. Απλά τοποθετούμε τις ακολουθίες που απαριθμούν αυτά τα πεπερασμένα σύνολα την μία μετά την άλλη.

[1] Δηλαδή μπορεί να έρθει σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με αυτό.
[2] Δηλαδή το σύνολο των υποσυνόλων.
[3] πλήθος στοιχείων.