Μαθηματικά Πληροφορικής 2011-2012

2ο Σύνολο Ασκήσεων

Λύσεις

Πρόβλημα 1(*Προσέγγιση Αθροίσματος*).

1. Αρχικά, εύκολα ελέγχουμε πως η πρότασή μας ισχύει για $n = 1$: $A_1 = \frac{1}{5} \leq \frac{13}{20}$. Στην συνέχεια, ισχυροποιώντας την επαγωγική μας υπόθεση, αρκεί να δείξουμε ότι $A_n \leq \frac{13}{20} - \frac{1}{n+1}$ για κάθε $n \geq 2$ Πράγματι:

Βαση: $A_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{11} = \frac{16}{55} \leq \frac{19}{60} = \frac{13}{20} - \frac{1}{3}$.

Επαγωγικο Βημα: Υποθέτουμε ότι $A_n \leq \frac{13}{20} - \frac{1}{n+1}$ για κάποιον φυσικό $n \geq 2$ και θα δείξουμε πως και $A_{n+1} \leq \frac{13}{20} - \frac{1}{n+2}$. Πράγματι είναι:

$$A_{n+1} = A_n + \frac{1}{(n+1)^2 + 3(n+1) + 1} \leq \frac{13}{20} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2 + 3(n+1) + 1},$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2 + 3(n+1) + 1} \leq -\frac{1}{n+2},$$

που γράφεται ισοδύναμα $\frac{1}{n^2+5n+5} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, που εύκολα ελέγχουμε ότι ισχύει, ολοκληρώνοντας την επαγωγική μας απόδειξη.

2. Είναι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k + 1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{11} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k + 1} \geq \frac{1}{5} + \frac{1}{11} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 2\frac{3}{2}k + \frac{9}{4}} = \frac{16}{55} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\left(k + \frac{3}{2}\right)^2}$$

και επειδή η συνάρτηση $x \mapsto \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}$ είναι φθίνουσα στο $[3, \infty)$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{16}{55} + \int_{x=3}^{\infty} \frac{1}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} \geq \frac{1}{2},$$

που ισχύει αφού

$$\int_{x=3}^{\infty} \frac{1}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} = \left[-\left(x + \frac{3}{2}\right)^{-1}\right]_3^{\infty} = \left(3 + \frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{9}.$$

Πρόβλημα 1(*Αναδρομικός ορισμός συνόλου ακεραίων*). Θα δείξουμε ότι το Q είναι το σύνολο των περιττών φυσικών αριθμών $\Pi = \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$. Θα το κάνουμε δείχνοντας ότι $Q \subseteq \Pi$ και $\Pi \subseteq Q$, το πρώτο με δομική επαγωγή στο Q και το δεύτερο με ισχυρή μαθηματική επαγωγή στο Π:

Απόδειξη του $Q \subseteq \Pi$: Στην βάση της δομικής μας επαγωγής, εύκολα βλέπουμε ότι $1 \in \Pi$ (για $n = 1$). Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε πως για κάποιο a ισχύει $a \in \Pi$ και θα δείξουμε πως και $2a-1, 2a+1 \in \Pi$. Πράγματι, αφού $a \in \Pi$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a = 2n-1$ και άρα $2a-1 = 2\cdot(2n-1)-1 \in \Pi$ και $2a+1 = 2(2n-1)+1 = 4n-1 = 2\cdot 2n - 1 \in \Pi$.

Απόδειξη του $\Pi \subseteq Q$: Στην βάση της μαθηματικής μας επαγωγής, εύκολα βλέπουμε ότι $2\cdot 1 - 1 = 1 \in Q$ (από την βάση του αναδρομικού ορισμού του A) και $2\cdot 2 - 1 = 3 = 2\cdot 1 + 1 \in Q$ (χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό ορισμό του Q, αφού ήδη είδαμε ότι $1 \in Q$). Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε πως για κάποιο $n \geq 2$ ισχύει $2k-1 \in Q$ για όλα τα $k \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ και θα δείξουμε πως και $2(n+1)-1 = 2n+1 \in Q$. Πράγματι, ας ορίσουμε $k_1 = \frac{n+1}{2}$, $k_2 = \frac{n+2}{2}$. Αρχικά, παρατηρείστε πως ένας εκ των $n+1$, $n+2$ είναι άρτιος, και συνεπώς $k_1 \in \mathbb{N}$ ή $k_2 \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, αφού $n \geq 2$, εύκολα βλέπουμε ότι $k_1, k_2 \leq n$, και άρα από την επαγωγική μας υπόθεση παίρνουμε πως $2k_1 - 1 \in Q$ ή $2k_2 - 1 \in Q$, δηλαδή, αντικαθιστώντας, $n \in Q$ ή $n+1 \in Q$, που από τον αναδρομικό ορισμό του Q αμέσως δίνει ότι $2n+1 \in Q$ ή $2(n+1)-1 = 2n+1 \in Q$, που ολοκληρώνει την απόδειξη.